Глава 1. Общие принципы механики.

**Оглавление**

§1. Основные определения ............................................................................................................. 2 §2. Принцип наименьшего действия .............................................................................................. 4 §3. Уравнения Лагранжа ................................................................................................................. 5 §4. Свойства функции Лагранжа .................................................................................................... 7 §5. Инерциальные системы отсчета ............................................................................................... 9 §6. Закон инерции ......................................................................................................................... 11 §7. Принцип относительности Галилея ........................................................................................ 12 §8. Функция Лагранжа свободной материальной точки. Масса.................................................. 14 §9. Функция Лагранжа ЗАМКНУТОЙ системы взаимодействующих материальных точек ..... 16 §10. Функция Лагранжа НЕЗАМКНУТОЙ механической системы.............................................. 18 §11. Уравнения Ньютона ................................................................................................................ 18 §12. Функция Лагранжа в обобщенных координатах.................................................................... 19

1

Иванов И.А., Механика и теория упругости

**§1. Основные определения**

| ОПРЕДЕЛЕНИЕ |
| --- |

**Теорети́ческая меха́ника** - наука об общих законах

механического движения и взаимодействия материальных тел.

По Ньютону, « … механика есть учение о движениях, производимых какими бы то ни было силами, и о силах, требуемых для производства каких бы то ни было движений, точно изложенное и доказанное».

Прежде чем перейти к разговору об основной задаче механики, давайте сформулируем ряд определений.

Одним из основных понятий механики является понятие материальной точки. Вместо термина материальная точка мы будем часто говорить о “частицах”.

| ОПРЕДЕЛЕНИЕ |
| --- |

**Материальной точкой** понимается тело, размерами которого

можно пренебречь при описании его движения.

Естественно, возможность такого пренебрежения зависит от конкретных условий той или иной задачи. Например, планеты можно считать материальными точками, рассматривая их движение вокруг Солнца.

Мы привыкли к тому, что положение материальной точки в пространстве определяется ее радиус-вектором *R*, компоненты которого совпадают с ее декартовыми координатами *x* , *y* , *z* . При этом скоростью называется первая производная по времени:



= ≡ ,

*V*

*dR dt*

*R*

а ускорением материальной точки называется вторая производная по времени:

 

*a*

2

= = ≡

*dV*

*d R*

*R*

.

*dt*

*dt*

2

2

Иванов И.А., Механика и теория упругости

Напоминаю, что обозначение дифференцирования по времени *dtd*эквивалентно  обозначению точкой над буквой, то есть

*d*.

≡

*dt*

∙

Для определения положения системы из *N* независимых материальных точек в пространстве надо задать *N* радиус-векторов, т.е. *3N* координат.

| ОПРЕДЕЛЕНИЕ |
| --- |

**Числом степеней свободы** (будем обозначать буквой ***s***)

механической системы называют число независимых величин, задание которых необходимо задать для однозначного определения положения этой системы в пространстве.

Эти величины не обязательно должны быть декартовыми координатами точек, и в зависимости от условий задачи может оказаться более удобным выбор каких-либо других координат, которые принято называть обобщенными.

| ОПРЕДЕЛЕНИЕ Любые |
| --- |

*s* величин 1 *q*, 2 *q*, …, *s q*описывающие положение

механической системы (с *s* степенями свободы), называют ее **обобщенными координатами**, а производные *s q*ее **обобщенными скоростями**.

| ОПРЕДЕЛЕНИЕ |
| --- |

**Законом движения** зависимость обобщенных координат

описывающих положение механической системы от времени.

| ОПРЕДЕЛЕНИЕ |
| --- |

Соотношения, связывающие ускорения с координатами и

скоростями, называются **уравнениями движения**.

Теперь у нас есть вся информация, что бы сформулировать основную задачу механики.

3

Иванов И.А., Механика и теория упругости

| ВАЖНО! |
| --- |

*Основная задача механики заключается в определении закона движения*

*механической системы.*

**§2. Принцип наименьшего действия**

| ВАЖНО! ИЗ ОПЫТА1! |
| --- |

*Как показывает опыт, одновременное задание всех координат и*

*скоростей полностью определяет, состояние механической системы и позволяет в принципе предсказать дальнейшее ее движение. С математической точки зрения это значит, что заданием всех координат qи скоростей* ∙*s qв некоторый момент времени однозначно определяется также и значение ускорений* ∙∙

*qsв этот момент*.

Наиболее общая формулировка закона движения механических систем дается так называемым принципом наименьшего действия (или принципом Гамильтона).

ВАЖНЕЙШИЙ ПРИНЦИП ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ! **Принцип Гамильтона** заключается в том, что каждая механическая система характеризуется функцией , (2.1) зависящей от обобщенных координат, обобщенных скоростей и быть может времени и которая удовлетворяет следующему условию:

(2.2)

имел наименьшее (или более обобщенно - экстремальное) значение2.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ Функция (2.1) называется **функцией Лагранжа**, а интеграл

|  |
| --- |

(2.2) – **действием**.

1 Здесь и далее к фразам типа “из опыта” нужно относиться с долей иронии и поправкой на время, когда этот опыт был приобретен.

2 Вольная трактовка принципа Гамильтона: природа устроена так, что при переходе от одного состояния к другому действие минимально (вообще говоря экстремально).

4

Иванов И.А., Механика и теория упругости

**§3. Уравнения Лагранжа**

Исходя из принципа наименьшего действия, получим уравнения движения механической системы. Для этого нам необходимо минимизировать действие *S*, то есть интеграл (2.2).

Для упрощения, но не теряя общности, предположим, что система обладает всего одной степенью свободы, так что должна быть определена всего одна функция .

Пусть есть как раз та функция, для которой *S* имеет минимум. Это значит, что *S* возрастает при замене на любую функцию вида

, (3.1)

где - функция, малая во всем интервале времени от до (ее называют вариацией функции ); поскольку при и все сравниваемые функции (3.1) должны принимать одни и те же значения и , то должно быть выполнено следующее условие:

. (3.2)



*Рисунок 3.1.*

Условием “экстремальности” действия S является равенство нулю его первой вариации:

5

Иванов И.А., Механика и теория упругости

(3.3) 

.

Разложим эту разность по степеням (в подынтегральном выражении). Имеем:

*t*

2

*t*

2

( ) ( )

∫ ∫

  

δ δ δ

*S L q q q q t dt L q q t dt* = + + − ≅ , , , ,

*t*

1

*t*

1

*t*

⎢⎣⎡∂∂ ∂

*t*

− = ⎥⎦⎤

2

*L*

*L*

2

( ) ( ) ∫ ∫



≅ + *L q q t*

 

, , , , δ δ

*t*

∂

1

*q*

*q*

+



*q*

*q dt L q q t dt*

*t*

1

*t*

⎢⎣⎡∂∂ ∂

= ⎥⎦⎤

=

2

∫

*L*

*L*

δ δ



*t*

∂

1

*q*

*q*

+



*q*

*q dt*

0

Замечая, что , проинтегрируем второе слагаемое под интегралом последнего равенства по частям3:

*t*

⎢⎣⎡∂∂ ∂

= ⎥⎦⎤

⎢⎢⎢⎢⎢⎣⎡∂∂ *t*

⎥⎥⎥⎥⎥⎦⎤

2

*L*

*L*

2

∂

*L*

*L*

*d*

∫ ∫



δ δ δ δ δ

*S*

≅

+

∂

*q*

*q*



*q*

*q dt*

+

∂

*q*

*q*

*q dt*

 

=

*t*

1

*t*

1

*q*



*dt*

*t*

∂

*L*

2

*t*

⎢⎢⎢⎢⎢⎣⎡∂∂ ∂

*G dF*

*dt*

⎥⎥⎥⎥⎥⎦⎤

=

2

∫

*L*

*d*

*L*

δ δ δ

*q*

+

*q*

−

*q dt*

=

 

  ∂

*q*

∂

*q*

*dt*

*q*

*F*

*G*

*t*



*t F* 1

*dG*

1

*dt*

∂

*L*

*t*

*t*

⎢⎣⎡∂∂ ∂

= ⎥⎦⎤

=

2

2

∫

*L*

*d*

*L*

δ δ

*q*

+

−

*qdt*

0

∂

 

*q*

*t*

1

*t*

1

∂

*q*

*dt*

*q*

В силу условий (3.2) первое слагаемое в последнем выражении обращается в нуль: *Lt*

∂

2

∂

*L*

∂

*L*

( ) ( ) 0

δ δ δ .

*q*

=

*q t*

−

*q t*

=

    

∂

*q*

∂

*q*

2

∂

*q*

1

*t*

1

В результате:

= = 0

0

3 ( ) ( )∫ ∫ *d FG* = *GdF* + *FdG* ⇒ *GdF* = *d FG* − *FdG* ⇒ *GdF* = *FG* − *FdG*или

*t*

2

*dF G*

*t*

*dG dt FG F*

*t*

2

∫ ∫

= −

2

*dt*

*t*

1

*dt*

*t*

1

*t*

1

*dt*

6

Иванов И.А., Механика и теория упругости

*t*

⎢⎣⎡∂∂ ∂

= ⎥⎦⎤

2

*L*

*d*

*L*

∫*qdt*

−

.

*t*

1

∂

*q*

*dt*

*q*

δ

0

Этот интеграл должен обращаться в нуль для любых функций δ*q*. Это возможно только в том случае, если выражение в квадратных скобках тождественно равно нулю, то есть: ∂

*L*

−

*d*

∂

*L*

= 0

∂

*q*

*dt*

. (3.4) ∂

*q*

При наличии нескольких степеней свободы в принципе наименьшего действия должны независимо варьироваться *s* различных функций *qi*(*t*). Очевидно, что тогда мы получаем *s* уравнений аналогичных уравнению (3.4):

| ∂  *L*  *d*  ∂  *L*  , где *i* = (1, 2, …, *s*).  −  = 0  ∂  *q*  *i qi*  *dt*  ∂ |
| --- |

(3.5)

| ОПРЕДЕЛЕНИЕ |
| --- |

Полученные уравнения движения (3.4) называются

**уравнениями Лагранжа**.

Если функция Лагранжа данной механической системы известна, то уравнения (3.5) устанавливают связь между ускорениями, скоростями и координатами, т.е. представляют собой уравнения движения системы. С математической точки зрения уравнения (3.5) составляют систему *s* уравнений второго порядка для s неизвестных функций *qi*(*t*). Общее решение такой системы содержит 2*s* произвольных постоянных.

| ВАЖНО! |
| --- |

*Для их определения и тем самым полного определения движения механической*

*системы необходимо знание начальных условий, характеризующих состояние системы в некоторый заданный момент времени, например знание начальных значений всех координат и скоростей.*

**§4. Свойства функции Лагранжа**

| ОПРЕДЕЛЕНИЕ |
| --- |

**Замкнутой** называется механическая система, не

взаимодействующая ни с какими посторонними телами.

7

Иванов И.А., Механика и теория упругости

Пусть механическая система состоит из двух частей *А* и *В*, каждая из которых, будучи замкнутой, имела бы в качестве функции Лагранжа соответственно функции *LА* и *LB*. Тогда в пределе, при разведении частей настолько далеко, чтобы взаимодействием между ними можно было пренебречь, Лагранжева функция всей системы стремится к пределу

lim *L*= *LА* + *LB*. (4.1)

Формула 4.1 говорит об аддитивности функции Лагранжа.

| ВАЖНО! |
| --- |

*Свойство аддитивности функции Лагранжа выражает собой тот факт, что*

*уравнения движения каждой из невзаимодействующих частей не могут содержать величины, относящиеся к другим частям системы.*

| ВАЖНО! |
| --- |

*Функция Лагранжа определена лишь с точностью до прибавления к ней полной*

*производной от любой функции координат и времени.*

Покажем это. Рассмотрим две функции *L*′(*q*, *q*,*t*)и *L*(*q*,*q*,*t*), отличающиеся друг от друга на полную производную по времени от какой-либо функции координат и времени *f* (*q*,*t*):

*d*

( ) ( ) *f* (*q t*)

*L*′*q*,*q*,*t* = *L q*,*q*,*t* + , . (4.2) *dt*

Покажем, что уравнения движения механических систем, которые описываются этими функциями Лагранжа, полностью эквивалентны.

8

Иванов И.А., Механика и теория упругости

⎢⎣⎡⎟ +

*d*

⎥⎦⎤

⎢⎣⎡⎟ +

*d*

⎥⎦⎤

⎜⎝⎛

⎞

⎜⎝⎛

⎞

∙ ∙

∂

*L q q t*

( ) ( )

, , , , , ,

∂ ′ *L*

−

*d*

∂ ′ *L*

=

⎠

*f q t*

*dt*

∂

−

*d*

*L q q t*

⎠

*f q t*

*dt*

=

∂

*q*

∂

*L*

*dt*

∂

∂

∙

*q*

*d*

*d*

∂

∂

*q*

*dt*

∂

∙

*q*

*L*

*d*

∂

*d*

=

( ) ( ) +

*f q t*

, ,

∂

*q q*

−

−

∙ ∙

*f q t*

=

∂

*dt*

*dt*

∂

*q*

*dt*

∂

*q*

*dt*

∂

*L*

*d*

∂

*L*

∂

⎢⎣⎡∂∂ ∂

−⎥⎦⎤

⎢⎣⎡∂∂

=⎥⎦⎤

=

−

+

*f*

*dq*

+

*f*

*d*

∂

∂

*f*

*dq*

+

*f*

∂

*q*

*dt*

∙ ∙

∂

*q*

∂

*q*

∂

*q*

*dt*

*t*

*dt*

∂

*q*

∂

*q*

*dt*

*t*

∂

*L*

*d*

∂

*L*

∂

⎢⎣⎡∂∂ ∂

−⎥⎦⎤

⎢⎣⎡∂∂

=⎥⎦⎤

=

−

+

*f*

∙

*f*

*d*

∂

∂

*f*

∙

*f*

∂ ∂

*q*

*dt*

∂

∙

*q*

∂

*q* 2

∂

*q*

*q*

+ 2

*t*

*dt*

∂

∙

*q*

∂

*q*

*q*

+

*t*

=

*L*

−

*d*

∂

*L*

∂

+

*f*

∙

∂

*f*

*d*

∂

*f*

*d*

∂

∂

*f*

∂

*q*

*dt*

∂

∙

*q*

∂

*q*

2

*q*

+

∂ ∂

*t q*

−

*dt*

−

∂

*q*

*dt*

∂

∙

*q*

=

∂

*t*



∂

*L*

*d*

∂

2

2 2

≡

2

0

*L*

∂

*f*

∂

*f*

∂

*f*

∂

*f*

∂

*L*

*d*

∂

=

−

+

∙ ∙

*L*

∂

*q*

*dt*

∂

∙

*q*

∂

*q*

2

*q*

+

∂ ∂

*t q*

−

−

∂

*q*

*q*

2

=

∂ ∂

*q t*

−

∂

*q*

*dt*

∂

∙

*q*

,

то есть уравнения движения совпадают. Именно это и требовалось показать.

Вообще говоря, можно было бы не делать все эти выкладки, а просто записать действие*S*′:



откуда видно, что *S*′отличается от *S*слагаемым, которое исчезнет при варьировании.

**§5. Инерциальные системы отсчета**

Для изучения механических явлений необходимо иметь систему отсчета. В различных системах отсчета законы движения имеют, вообще говоря, различный вид. Если взять произвольную систему отсчета, то может оказаться, что законы даже совсем простых явлений будут выглядеть в ней весьма сложно. Естественно, возникает задача отыскания такой системы отсчета, в которой законы механики выглядели бы наиболее просто.

По отношению к произвольной системе отсчета пространство является неоднородным

9

Иванов И.А., Механика и теория упругости

и неизотропным. Это значит, что если какое-либо тело не взаимодействует ни с какими другими телами, то, тем не менее, его различные положения в пространстве и его различные ориентации в механическом отношении не эквивалентны. То же самое относится в общем случае и ко времени, которое будет неоднородным, т.е. его различные моменты неэквивалентными. Усложнение, которое вносили бы такие свойства пространства и времени в описание механических явлений, очевидно. Как, например, свободное (т.е. не подвергающееся внешним воздействиям) тело не могло бы покоиться: если скорость тела в некоторый момент времени и равна нулю, то уже в следующий момент тело начало бы двигаться в некотором направлении.

| ОПРЕДЕЛЕНИЕ |
| --- |

Пространство называется **однородным**, если параллельный

перенос системы не изменяет ее механической свойств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ Пространство называется **изотропным**, если поворот системы

|  |
| --- |

на произвольный угол не изменяет ее механических свойств.

| ОПРЕДЕЛЕНИЕ |
| --- |

времени

**Однородность времени** - это равнозначность всех моментов

Равнозначность моментов времени заключающаяся в том, что замена момента времени *t*1 моментом времени *t*2 без изменения значений координат и скоростей тел не изменяет механических свойств системы.

| ВАЖНО! ИЗ ОПЫТА! |
| --- |

*Оказывается, что всегда можно найти такую систему отсчета,*

*по отношению к которой пространство является однородным и изотропным, а время однородным. Именно в этой системе отсчета законы механики наиболее простые.*

| ОПРЕДЕЛЕНИЕ |
| --- |

**Инерциальной** называется система отсчёта, по отношению к

которой пространство является однородным и изотропным, а время — однородным.4

4 Часто можно встретить альтернативное определение: Инерциальная система отсчёта это система отсчёта, в которой все свободные тела движутся прямолинейно и равномерно или покоятся. Вообще такое определение является следствием однородности и изотропии пространства. Это более подробно будет рассматриваться в §6.

10

Иванов И.А., Механика и теория упругости

| ВАЖНО! |
| --- |

*Законы Ньютона, а также все остальные аксиомы динамики в классической*

*механике формулируются по отношению к инерциальным системам отсчёта.*

**§6. Закон инерции**

Рассмотрим свободно движущуюся материальную точку в инерциальной системе отсчета. Попытаемся сделать некоторые заключения о виде функции Лагранжа этой точки. Для простоты и наглядности будем использовать систему декартовых координат.

Однородность пространства и времени означает, что эта функция не может содержать явным образом ни радиус-вектора *R*точки, ни времени *t*, т.е. *L* является функцией лишь скорости*V*.

В силу же изотропии пространства функция Лагранжа не может зависеть также и от направления вектора *V*, поэтому она является функцией лишь от его абсолютной :

величины, т.е. от квадрата 2 2 *V* =*V*

( )2

*L* = *L V* . (6.1)

Ввиду независимости функции Лагранжа от *R*имеем0

∂*R*

*L*, и потому уравнения

 =

∂

Лагранжа принимают вид5:

0

*d*,

∂

*L*

*dt*

∂

 = *V*

∂. Но поскольку (как мы только что установили)*V*

*L* =

откуда*const*

∂является *L*

∂

*V*

∂

, т.к.

функцией только квадрата скорости, то отсюда, очевидно, следует, что и →

*V* = *const*



( )*const*

∂→

2.

*L V*=

= ∂

*L*

*V const L*

∂

  2

= ⇒ ∂

*V*

∂

*V*

∂

*V*

Таким образом, мы приходим к выводу, что в инерциальной системе отсчета всякое свободное движение происходит с постоянной по величине и направлению скоростью (включая состояние покоя). Это утверждение составляет содержание так называемого

5 Под производной скалярной величины по вектору подразумевается вектор, компоненты которого равны производным от этой величины по соответствующим компонентам вектора.

11

Иванов И.А., Механика и теория упругости

закона инерции.

| ЗАКОН! |
| --- |

**Закон инерции** - это утверждение о том, что в инерциальной системе

отсчета всякое свободное движение происходит с постоянной по величине и направлению скоростью.

ЗАМЕЧАНИЕ Важно отметить, что идеи этого и предыдущего параграфов составляют

|  |
| --- |

*первый законом Ньютона*, который в современной физике принято формулировать следующим образом. Существуют такие системы отсчёта, называемые инерциальными, относительно которых материальные точки, когда на них не действуют никакие силы (или действуют силы взаимно уравновешенные), находятся в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения.

**§7. Принцип относительности Галилея**

Если наряду с имеющейся у нас инерциальной системой отсчета мы введем другую систему, движущуюся относительно первой прямолинейно и равномерно, то законы свободного движения по отношению к этой новой системе будут теми же, что и по отношению к первоначальной: свободное движение снова будет происходить с постоянной скоростью.

Таким образом, существует не одна, а бесконечное множество инерциальных систем отсчета, движущихся друг относительно друга прямолинейно и равномерно. Во всех этих системах свойства пространства и времени одинаковы и одинаковы все законы механики. Это утверждение составляет содержание так называемого принципа относительности Галилея, важнейшего принципа механики.

| ВАЖНЕЙШИЙ ПРИНЦИП ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ! |
| --- |

**Принцип относительности Галилея** – это утверждение о том, что существует бесконечное множество инерциальных систем отсчета, в которых одинаковы все законы механики.

12

Иванов И.А., Механика и теория упругости

Везде в дальнейшем, где обратное не оговорено особо, мы будем рассматривать только инерциальные системы отсчета.

Полная механическая эквивалентность всего бесчисленного множества таких систем показывает в то же время, что не существует никакой одной «абсолютной» системы отсчета, которую можно было бы предпочесть другим системам.



Рис. 7.1.

Координаты *R*и*R*′одной и той же точки в двух различных системах отсчета *К* и 

*К'*, из которых первая движется относительно второй со скоростью *VK* связаны друг с другом соотношением



(см. рис. 7.1),

| =′ − ⋅  *R R V t*    *K* |
| --- |

.(7.1)

При этом подразумевается, что ход времени одинаков в обеих системах:

| *t* = *t*′ |
| --- |

. (7.2)

| ЗАМЕЧАНИЕ |
| --- |

Предположение об абсолютности времени лежит в самой основе

представлений классической механики.

13

Иванов И.А., Механика и теория упругости

ОПРЕДЕЛЕНИЕ Формулы (7.1) и (7.2) составляют **преобразование Галилея**.

|  |
| --- |

Принцип относительности Галилея можно сформулировать как требование инвариантности уравнений движения механики по отношению к этому преобразованию.

**§8. Функция Лагранжа свободной материальной точки. Масса.**

Переходя к определению вида функции Лагранжа, рассмотрим сначала простейший случай свободного движения материальной точки относительно инерциальной системы отсчета.

Как мы уже видели в §6, функция Лагранжа в этом случае может зависеть лишь от квадрата вектора скорости. Для выяснения вида этой зависимости воспользуемся принципом относительности Галилея. Если инерциальная система отсчета *К* движется

относительно инерциальной системы отсчета *К'* с бесконечно малой скоростью е, то  

*V*′=*V* + . Необходимо подобрать такой вид функции Лагранжа, чтобы при переходе от ε

одной инерциальной системы отсчета к другой, материальная точка, которая двигалась с постоянной скоростью или покоилась, сохраняла состояние покоя или равномерного прямолинейного движения. При этом, функция Лагранжа как в новой, так и в старой системах координат, должна зависеть от квадрата скорости с точностью до полной

производной по времени от функции, зависящей от координат и времени:    

*L L V L V V L V V L V*∂∂

*L*

( ) ( ) ( ) ( )( )

=′= + + ≅ + ≈ +

2 2 2 2 2 *V*

2 , 2 2 ,

ε ε ε ε

*V*

2

В этих выкладках мы провели разложение в ряд и пренебрегли бесконечно малыми высших порядков по степеням ε . Угловыми скобками обозначается скалярное

произведение. Второй член последнего выражения будет полной производной по времени только в том случае, если он зависит от скорости *V*линейно:

 



  

( ) ( ) ( )⎥⎦⎤ ⎢⎣⎡∂∂

∂ε ε ε *L*. ∂

*L*

*dR*

*d*

*L*

2 2 2*R* 2 , 2 , 2 ,

∂

*V*

*V*

=

∂

*V*

*dt*

=

*dt*

*V*

∂от скорости не зависит, а функция Лагранжа в рассматриваемом  *L*∂

Поэтому ( )2 *V*

случае прямо пропорциональна квадрату скорости:

14

Иванов И.А., Механика и теория упругости

*m*

2

*L* = , (8.1)

2*V*

где *m* — постоянная.

Из того что функция Лагранжа такого вида удовлетворяет принципу относительности

Галилея в случае бесконечно малого преобразования скорости, следует, что и функция 

Лагранжа удовлетворяет этому принципу и в случае конечной скорости *VK*  

→, имеем:

отсчета *К* относительно *К'*. Покажем это. Так как *V const f* (*t*) *K* = ≠

системы

*m*

*m*

  

( ) ( ) ′ = ′ = ′ = + + =

*L L V*

2 2 2 2

*V*

*V V V V*

*m*

*m*

2 2

   *m*

2 ,

*K K*

2 2

= + + =

*V*

2

*V V* ,

*V*

2

 *L*

*d*

2

*m*

*K K*

2

  

⎢⎣⎡

= + +

*m*

2

⎥⎦⎤

*L*

2

*R V* ,

*V t*

*dt*

2

*K K* 2

Второй член является полной производной и может быть опущен. Это означает, что *L* и *L*′эквивалентны, что и требовалось показать.

| ОПРЕДЕЛЕНИЕ Величину |
| --- |

*m* в (8.1) называют **массой**.

В силу свойства аддитивности, функция Лагранжа системы невзаимодействующих *N* материальных точек представляет собой сумму функций Лагранжа каждой из этих точек, то есть:

. (8.2)

Полезно заметить, что

| *m*  =∑  *L*2  *i V*  *i*  2  *i* |
| --- |



Поэтому для составления функции Лагранжа достаточно найти квадрат длины элемента дуги *dl* в соответствующей системе координат.

В декартовых координатах:



15

Иванов И.А., Механика и теория упругости

и, следовательно, в цилиндрических и

в сферических и



; .

**§9. Функция Лагранжа ЗАМКНУТОЙ системы взаимодействующих материальных точек**

Рассмотрим теперь замкнутую систему из *N* материальных точек, взаимодействующих только друг с другом.

| ВАЖНО! ИЗ ОПЫТА! |
| --- |

*Оказывается, что взаимодействие между материальными*

*точками может быть описано прибавлением к функции Лагранжа невзаимодействующих точек (8.2) определенной (зависящей от характера взаимодействия) функции координат.*

Обозначив эту функцию через *-U*, напишем

| *L*    *m*  ( )*N*  = ∑ −  2  *n V U R R R*  , ,...,  21 2  *n*  *n* |
| --- |

, (9.1)

- радиус-вектор *n*-й точки). Это есть общий вид функции Лагранжа замкнутой где *Rn*

системы.

16

Иванов И.А., Механика и теория упругости

= ∑

*m*

| ОПРЕДЕЛЕНИЕ Сумму |
| --- |

*T*2

*i V*

2называют **кинетической энергией**, а

*n*

*n*

| ВАЖНО! |
| --- |

функцию *U* — **потенциальной энергией** механической системы. *Потенциальная энергия есть величина, определяемая лишь с точностью до*

*прибавления к ней произвольной постоянной; такое прибавление не изменило бы уравнений движения. Наиболее естественный и обычно принятый способ выбора (калибровки) этой постоянной заключается в том, чтобы потенциальная энергия стремилась к нулю при увеличении расстояний между частицами.*

Тот факт, что потенциальная энергия зависит только от расположения всех материальных точек в один и тот же момент времени, означает, что изменение положения одной из них мгновенно отражается на всех остальных; можно сказать, что взаимодействия «распространяются» мгновенно.

Неизбежность такого характера взаимодействия в классической механике тесно связана с основными предпосылками последней — абсолютностью времени и принципом относительности Галилея. Если бы взаимодействие распространялось не мгновенно, т.е. с конечной скоростью, то эта скорость была бы различна в разных (движущихся друг относительно друга) системах отсчета, так как абсолютность времени автоматически означает применимость обычного правила сложения скоростей ко всем явлениям. Но тогда законы движения взаимодействующих тел были бы различны в разных (инерциальных) системах отсчета, что противоречило бы принципу относительности.

Мы говорили только об однородности времени. Вид функции Лагранжа (8.3) показывает, что время не только однородно, но и ***изотропно***, т.е. его свойства одинаковы по обоим направлениям. В самом деле, замена *t* на *-t* оставляет функцию Лагранжа, а следовательно, и уравнения движения неизменными. Другими словами, если в системе возможно некоторое движение, то всегда возможно и обратное движение, т.е. такое, при

котором система проходит те же состояния в обратном порядке. В этом смысле все движения, происходящие по законам классической механики, обратимы.

17

Иванов И.А., Механика и теория упругости

**§10. Функция Лагранжа НЕЗАМКНУТОЙ механической системы**

До сих пор мы говорили только о замкнутых системах. Рассмотрим теперь незамкнутую систему *А*, взаимодействующую с другой системой *В*, совершающей заданное движение, то есть для системы *B* известен закон движения. В таком случае говорят, что система *А* движется в заданном внешнем поле (создаваемом системой *В*). Поскольку уравнения движения получаются из принципа наименьшего действия путем независимого варьирования каждой из координат (т.е. как бы считая остальные известными), мы можем для нахождения функции Лагранжа *LА* системы *А* воспользоваться лагранжевой функцией *L* всей системы *А* + *В*, заменив в ней координаты *qB* заданными функциями времени.

Предполагая систему *А* + *В* замкнутой, будем иметь

( ) ( )  

( ) *A B*

*L TAqAqATBqBqBU q q*

=, + , − ,



( )

*T t*

*B*

где первые два члена представляют собой кинетические энергии систем *А* и *В*, а третий член — их совместную потенциальную энергию. Подставив вместо *qB* заданные функции времени и опустив член ( ) *TB qB qB*

,, зависящий только от времени (и поэтому являющийся

полной производной от некоторой другой функции времени), получим 

Таким образом, движение системы во внешнем поле описывается функцией Лагранжа обычного типа с тем лишь отличием, что теперь потенциальная энергия может зависеть от времени явно.

**§11. Уравнения Ньютона**

Рассмотрим замкнутую систему из *N* материальных точек. Зная функцию Лагранжа, мы можем составить уравнения движения для каждой точки этой системы

*d* 

∂0

*dt*

−

∂

*L V*

∂

*L*

∂

= ⇔

*n Rn*

*d*  ∂

(11.1)

*L*

∂

*L*

⇔ .

*dt*

∂

*V*

=

*n Rn* ∂

18

Иванов И.А., Механика и теория упругости

Подставив сюда (9.1), получим



|     *dV*  ∂  *U*      *m n n* = −  ⇔ =  *F m a*  *n*  *n*  *dt*  ∂  *R*  *n* |
| --- |

. (11.2)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ Уравнения движения, записанные в форме (11.2), называются

|  |
| --- |

**уравнениями Ньютона**.



∂

*U*

| ОПРЕДЕЛЕНИЕ Вектор |
| --- |

*F* 

= − , стоящий в правой части уравнений (11.2), *nR*

∂

*n*

называется **силой**, действующей на *n*-ю точку

, также как и потенциальная энергия *U* зависит от координат всех частиц, но Сила *Fn*

не от их скоростей. Уравнения (11.2) показывают поэтому, что и векторы ускорения частиц являются функциями только от координат.

ЗАМЕЧАНИЕ Соотношения (2.1) представляют собой *второй закон Ньютона*, который в

|  |
| --- |

современной физике принято формулировать так. В инерциальной системе отсчёта ускорение, которое получает материальная точка с постоянной массой, прямо пропорционально равнодействующей всех приложенных к ней сил и обратно пропорционально её массе.

**§12. Функция Лагранжа в обобщенных координатах**

Если для описания движения используются не декартовы координаты точек, а произвольные обобщенные координаты *qi*, то для получения лагранжевой функции надо произвести соответствующее преобразование

= 1 2, ∑∂∂

( ) *i iq q qs*

*f*

*x*  *iq*

*x f* , ,...,

и т.д. Подставляя эти выражения в функцию

=

*k*

*q*

*i*

*k*

*k*

1  ,= ∑ *n n* + *n* + *n* −

*L m* (*x y z* ) *U* 2 2 2

2

*n*

19

Иванов И.А., Механика и теория упругости

получим искомую функцию Лагранжа, которая будет иметь вид

| 1  = ∑ *ik* *i**k* − =,  −  *L a* (*q*)*q q U*(*q*) *T*(*q q*) *U*(*q*) 2  *i k*  , |
| --- |

, (12.1)

где *aik* — функции только от координат. Кинетическая энергия в обобщенных координатах по-прежнему является ***квадратичной*** функцией скоростей, но может зависеть также и от координат.

20

Иванов И.А., Механика и теория упругости

Глава 2. Законы сохранения

**Оглавление**

§1. Общие понятия ................................................................................................................................2 §2. Закон сохранения энергии..............................................................................................................3 §3. Закон сохранения импульса ...........................................................................................................6 §4. Центр инерции, движение механической системы как целого...................................................9

§5. Преобразование энергии при переходе между различными инерциальными системами отсчета........................................................................................................................................................11

§6. Закон сохранения момента импульса..........................................................................................12

§7. Преобразование момента импульса при переходе между различными инерциальными системами отсчета.....................................................................................................................................16

§8. Заключение ....................................................................................................................................18

1

Иванов И.А., Механика и теория упругости

**§1. Общие понятия**

При движении механической системы 2*s* величин *i q*, и *i q*, (*i* = 1, 2, ... , *s*), определяющих ее состояние, изменяются со временем1. Существуют, однако, такие функции этих величин, которые сохраняют при движении постоянные значения и зависят только от начальных условий. Эти функции называют интегралами движения.

| ОПРЕДЕЛЕНИЕ |
| --- |

**Интегралом движения** называется любая функция

*I* = *I*(*q*, *q*), зависящая от обобщенных координат и обобщенных скоростей и сохраняющая при движении свое значение. То есть:*I* = *I*(*q*,*q*) = *const* .

Далеко не все интегралы движения играют одинаково важную роль в механике. Среди них есть несколько, постоянство которых имеет весьма глубокое происхождение, связанное с основными свойствами пространства и времени их однородностью и изотропией. Все эти, как говорят, сохраняющиеся величины имеют важное общее свойство аддитивности. Это означает, что значение величины для системы, состоящей из частей, равно сумме значений для каждой из частей в отдельности. Именно свойство аддитивности придает соответствующим величинам особенно важную механическую роль.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ Интегралы движения, обладающие свойством аддитивности

|  |
| --- |

(или асимптотической аддитивности) называют **законами сохранения2**.

В качесвте иллюстрации, предположим, например, что два тела взаимодействуют в течение некоторого времени. Поскольку как до, так и после взаимодействия каждый из аддитивных интегралов всей системы равен сумме их значений для обоих тел в

1 Напоминаю, что *s*, число степеней свободы.

2 Сравните с определением, которая дает нам общая физика: **Законы сохранения** - фундаментальные физические законы, согласно которым при определённых условиях некоторые измеримые физические величины, характеризующие замкнутую физическую систему, не изменяются с течением времени.

2

Иванов И.А., Механика и теория упругости

отдельности, то законы сохранения этих величин сразу дают возможность сделать ряд заключений о состоянии тел после взаимодействия, если их состояния до взаимодействия известны.

Фундаментальный смысл законов сохранения раскрывается теоремой Нётер3. Согласно этой теореме, каждый закон сохранения однозначно соответствует той или иной симметрии уравнений, описывающих физическую систему. В частности, закон сохранения энергии соответствует однородности времени, закон сохранения импульса - однородности пространства, закон сохранения момента импульса - изотропии пространства.

**§2. Закон сохранения энергии**

Начнем с закона сохранения, возникающего в связи с однородностью времени. Рассмотрим замкнутую механическую систему из *N* частиц. В силу однородности времени лагранжева функция этой системы не зависит явно от времени. Следовательно, полная производная функции Лагранжа по времени может быть вычислена следующим образом:

( ) ∑ ∑∂∂

, 

*dL q q*

∂

*dt*

=

∂

*L q*



*q*

*i*

+

*L* 

*q*

*q*

*i*

*i i*

*i*

*i*

(если бы *L*зависела явно от времени, к правой части равенства добавился бы член *tL*∂∂). ∂. Подставляем в последнее

Так как, согласно уравнениям Лагранжа,

=

∂

*L*

*d*

∂

*L*

∂ 

равенство:

*q*

*dt*

*i qi*

*dL* 

*d*

∂

*L*

∂

*L*

=

∑ ∑ ⇔ 

*q*

+

*i q i*

*dt*

*dt*

∂

 

*q*

∂

*q*

*dL*

*i i i i*

⎜⎜⎝⎛∂∂

⎞

⇔ = ∑



*d*

∂

*L*

*L*



⎟⎟ ⇔

*q*

*i*

*dt*

*dt*

∂

−

 

*q*

*i*

*i*

*q*

*q*

⎠

 *i i*

*d td*

⎜⎜⎝⎛∂∂

⎟⎟⎠⎞



*q*

*i*

*L* 

*dL*

*d*

*q*

*i*

⎜⎜⎝⎛∂∂

⎞

⇔ =∑ *dt*



*q*

*dt*

*L*

*iq* 

⎟⎟ ⇔ ⎠

*i i*

3 Амалия Эмми Нётер (нем. Amalie Emmy Noether; 23 марта 1882, Эрланген, Германия - 14 апреля 1935, Брин-Мор, Пенсильвания, США) — немецкий математик, «самая крупная женщина-математик, когда-либо существовавшая».

3

Иванов И.А., Механика и теория упругости

*d*

⎜⎜⎝⎛∂∂ *L*

⎞

*dL*

⇔ ∑ 0

*dt*



*q*

*i*

⎟⎟− = ⇔

*q*

*i i*

⎠

*dt*

*d*

⎜⎜⎝⎛−

∂

*L*

⎞

⇔ ∑ *L* 0

*dt*



*q*

*i*

⎟⎟ = ⇒

∂

*q*

⎠

*i i*

∂

*L*

⇒ ∑ 

 .

*q*

*i* − =

∂

*q*

*L const*

Отсюда видно, что величина

(2.1)

*i i*

| ∂  *L*  ∑ −    *E q*  =  *i L*  ∂  *q*  *i i* |
| --- |

остается неизменной при движении замкнутой системы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ Скалярную величину *E*, определяемую по формуле (2.1),

|  |
| --- |

называют **энергией** системы.

ВАЖНО! Аддитивность энергии непосредственно следует из аддитивности функции

|  |
| --- |

Лагранжа4, через которую она выражается, согласно (2.1), линейным образом. Это означает, что соотношение (2.1), согласно определению, можно считать законом сохранения. Более того, этот закон принято назвать **законом сохранения энергии**.

Выразим энергию системы *E* через кинетическую *T* и потенциальную *U* энергии. Как мы видели5, лагранжева функция замкнутой (или находящейся в постоянном поле) системы имеет вид:

1.

= ∑ *ik l k* −

*L a* (*q*)*q q U*(*q*)

2 ,

 



*l k*

*T*

Дифференцируя это соотношение, найдем первое слагаемое правой части уравнения (2.1):

4 См. §4 главы 1

5 См. §12 главы 1 (формула 12.1)

4

Иванов И.А., Механика и теория упругости

⎜⎜⎝⎛∂ −

⎟⎟⎠⎞

1

∑

∂∑∑

( ) ( ) ( )

 

∑

*L*

∑

*a q q q U q*

∂

*lk l k*

2 1 *l k*

,

 

*a q q q lk l k*

,





*l k*

*q*

=

*q*

=

*q*

=

*iq*

∂



*q*

*i*

∂



*q*

2

*i*

∂

*i i*

*i i*

*i i*

1

⎜⎜⎝⎛

[ ] [ ] =⎟⎟⎠⎞

         

= ⋅ + + + + + + ⋅ + + + + *q a q a q as qs q a q a q a q* 1 1 1 1 1 2 2 1 2 ... ... 2 ... ... ...

2 1 2 2 2 2 2 2

 

*s s*

2

*i*

= =

1

*i*

2

= ∑   =

*a* (*q*)*q q T*

*ik i k* 2

*i k*

,

Подставляя полученный результат в (2.1), получим:

⎜⎜⎝⎛−

∂

*L*

⎞

=∑ *L T L T T U*



*E q*

⎟⎟ = − = −( − )⇒

*i* 2 2

∂



*q*

⎠

*i i*

| ⇒ *E* = *T* +*U* |
| --- |

. (2.2)

Запишем выражение (2.2) для частного случая декартовых координат:



*E T U*  

*m V*

2

( ) *n*

= + = ∑ + . (2.3) *n n U R R R*

, ,...,

21 2 *n*

ВАЖНО! Из выражения (2.3) можно сделать важный вывод. Энергия системы может быть

|  |
| --- |

представлена в виде суммы двух существенно различных членов: кинетической энергии, зависящей от скоростей, и потенциальной энергии, зависящей только от координат частиц.

ВАЖНО! Закон сохранения энергии справедлив не только для замкнутых систем, но и для

|  |
| --- |

систем, находящихся в постоянном (т.е. независящем от времени) внешнем поле; единственное использованное в приведенном выводе свойство функции Лагранжа отсутствие явной зависимости от времени имеется и в этом случае.

| ОПРЕДЕЛЕНИЕ |
| --- |

Механические системы, энергия которых сохраняется,

называют **консервативными**.

5

Иванов И.А., Механика и теория упругости

**§3. Закон сохранения импульса**

Другой закон сохранения возникает в связи с однородностью пространства. Как и в случае закона сохранения энергии, рассмотрим замкнутую систему из *N* частиц. Для удобства все выкладки будем делать в декартовых координатах6.

В силу однородности пространства механические свойства замкнутой системы не

меняются при любом параллельном переносе системы как целого. В соответствии с этим, рассмотрим бесконечно малый перенос на векторεи потребуем, чтобы функция

Лагранжа осталась неизменной7. Параллельный перенос означает преобразование, при котором все точки системы смещаются на один и тот же постоянный вектор ε, т.е. их

 

 

*Rn*′= *Rn* + . При этом, очевидно, *Vn Vn*

радиус-векторыε

′= .

Изменение функции *L* в результате бесконечно малого изменения координат при неизменных скоростях частиц есть

       

*L* = *L*(*R*′ *Rn*′ *V*′ *Vn*′)− *L*(*R Rn V Vn* )=

,..., , ,..., ,..., , ,..., δ 1 1 1 1

     

= *L*(*R* + *Rn* + *V Vn* )− *L*(*R Rn V Vn* )=

,..., , ,..., ,..., , ,..., 1 1 1 1

ε ε

∂

 

*L*

∑ ∑∂∂

*L*

 ,δ ε , ,

=

=

∂

*R*

*R*

*n*

*n R*

*n n n*

где суммирование производится по всем материальным точкам системы. С другой стороны

δ*L* = *L* − *L*′= 0 .

Следовательно,

∂

*L*





∂

*L*

= ∑ , ,∑ *L L* 0

δ  δ ε 

= − ′= ⇒

*L*

∂

*R*

*n*

=

∂

*R*

*n n n*

*n*

6 С тем же успехом можно оперировать обобщенными координатами

7 Тут следует внести ясность. Мы знаем, что функция Лагранжа замкнутой системы равна разнице кинетической и потенциальной энергий. Очевидно, что кинетические энергии в системах *K*и *K*′равны друг другу. Это означает, что разница функций Лагранжа в этих системах равна разнице потенциальных энергий взаимодействия частиц. Очевидно, что потенциальная энергия взаимодействия зависит только от

конфигурации самой системы, то есть она не зависит от выбора системы координат. Следовательно, *L*′ − *L* = 0.

6

Иванов И.А., Механика и теория упругости

ε . ∂

⇒ ∑

*L*

,= 0

∂

*n Rn*

Ввиду произвольности вектора εтребование δ*L* = 0эквивалентно требованию

∂

0

*L*. (3.1) ∑

 =

*n Rn*

∂

Далее, сложим все уравнения Лагранжа для рассматриваемой системы8 и с учетом (3.1) получим:

∂

*L*

*d*

∂

*L*



*d*

∂



*L*

∑ ∑ ∑



−

= ⇒

0 0

∂

*R*

*dt*

∂



*dt*



= ⇒

*R*

*n n R*



*nn*

∂

*nn*

=

0

0

*d*.

∂

⇒ ∑ *dt*

*L*

 =

*n Rn*

∂

Интегрируя последнее равенство получим:

*d*

∂

*L*



∂

*L*

→

∑ ∑ *const*  0 .

*dt*

= ⇒

*nn* ∂

=

*R*

 через букву *P*:

Обозначим ∑∂∂

*L*

*n Rn*

∂

*R*

*nn*

|   ∂  *L*  →  =∑ *const P*  =  *nn*  ∂  *R* |
| --- |

.(3.2)

Таким образом, мы приходим к выводу о том, что при движении в замкнутой механической системе векторная величина*P*остается неизменной.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ Векторную величину *P*, определяемую по формуле (3.2),

|  |
| --- |

называют **полным импульсом системы**.

ВАЖНО! Аддитивность импульса очевидна. Более того, в отличие от энергии импульс

|  |
| --- |

системы равен сумме импульсов отдельных частиц вне зависимости от возможности

8 См. §3 главы 1 (формула 3.5)

7

Иванов И.А., Механика и теория упругости

пренебрежения взаимодействием между ними. Это означает, что (3.2), согласно определению, можно считать законом сохранения. Более того, соотношение (3.2) принято назвать **законом сохранения импульса**.

Дифференцируя функцию Лагранжа, записанную в декартовых координатах9 *L*  

*m*

( ) *n*

= ∑ − , получим:

2

*n V U R R R*

, ,...,

21 2

*n*

*n*



∂

*L*

∂

*L*



→

=∑ ∑ ∑*m V const*

*P*

=

∂



∂



*V*

= = *n n*

*R*

*n n n*

*n*

*n*

ВАЖНО! Исходное равенство (3.1) имеет простой физический смысл. Производная10

|  |
| --- |

, действующая на *n*-ю частицу. Таким образом, равенство (3.1)

∂есть сила *Fn*

*L* 

= −

∂

*R*

∂

*U*

*n Rn*

∂

означает, что сумма сил, действующих на все частицы замкнутой системы, равна нулю:  .(3.3)

∑ =

*Fn* 0

*n*

ЗАМЕЧАНИЕ В частности, в случае системы, состоящей всего из двух материальных

|  |
| --- |

  

точек, 1 2 0

 

*F* + *F* =. Это означает, что *F*1 *F*2

= − , то есть сила, действующая на первую

частицу со стороны второй, равна по величине, но противоположна по направлению силе, действующей на вторую частицу со стороны первой. Это утверждение известно как закон равенства действия и противодействия или как *третий закон Ньютона*.

ВАЖНО! Закон сохранения всех трех компонент вектора импульса имеет место лишь в

|  |
| --- |

отсутствие внешнего поля. Однако отдельные компоненты импульса могут сохраняться и при наличии поля, если потенциальная энергия в нем не зависит от какой-либо из декартовых координат. При переносе вдоль соответствующей координатной оси механические свойства системы, очевидно, не меняются, и тем же способом мы найдем, что проекция импульса на эту ось сохраняется. Так, в однородном поле, направленном вдоль оси *z*, сохраняются компоненты импульса вдоль осей *х* и *у*.

9 См. §9 главы 1

10 См. §11 главы 1

8

Иванов И.А., Механика и теория упругости

Перейдем от декартовых координат к любым другим обобщенным координатам *q1, q2, …,qs*.

| ОПРЕДЕЛЕНИЕ |
| --- |

*p*∂∂

Производные лагранжевой функции по обобщенным

скоростям

*L*

=называются **обобщенными импульсами**, а производные

*iq*

*i*

*F*∂∂

*L*

=называются **обобщенными силами**.

*iq*

*i*

В этих обозначениях уравнения Лагранжа можно записать следующим образом:

 . (3.4)

*pi*= *Fi*

**§4. Центр инерции, движение механической системы как целого**

Рассмотрим замкнутую механическую систему из *N* частиц. Импульс замкнутой механической системы имеет различные значения по отношению к различным

инерциальным системам отсчета. Рассмотрим две инерциальные системы отсчета *K*и . Согласно

*K*′. Пусть *K*′движется относительно системы отсчета *K*со скоростью *VK*′ преобразованиям Галилея11 скорости *Vn*и*Vn*′одних и тех же частиц по отношению к этим   . Следовательно, связь между значениями

системам связаны соотношением*Vn Vn* +*VK*′ =′

полного импульса *P*и *P*′определяется следующим образом:

     

= ∑ = ∑ ( ′ + )= ∑ ′ + ′∑ ⇒ *P mnVn m V V m V V m*

′

*n n K*

*n*

*n*

*n n*

 *n*

*K n* 

*n*

μ

*P*

′

, (4.1)

| *P P* + *VK*′ =′ μ |
| --- |

где = ∑

μ *mn*- полная масса рассматриваемой механической системы (сумма масс всех *n*

11 См. §7 главы 1

9

Иванов И.А., Механика и теория упругости

частиц).

Из равенства (4.1) следует, что всегда существует такая система отсчета *K*′, в  

которой полный импульс*P*′обращается в нуль. Действительно, положив в (4.1)0 *P*′= ,

найдем скорость этой системы отсчета относительно *K*:

   ∑

*P V m V*



*P*

= ⇒ = ⇒

′

′

∑

*Km*

*n*

*K*

   

*P*

′=

*n*

*P n* ′=

0 0 *n*



| ∑  *m V*       *n n*  ⇒ ≡ =  *V V*  *n*  ∑  ′  *ЦИ Km*   0  *n*  ′=  *P*  *n* |
| --- |

. (4.2) , определяемой

То есть, если система отсчета*K*′двигается со скоростью*VЦИ*

формулой (4.2), то суммарный импульс рассматриваемой механической системы в этой системе равен нулю.

ВАЖНО! Если полный импульс механической системы равен нулю, то говорят, что она

|  |
| --- |

***покоится*** относительно соответствующей системы отсчета. Это является вполне естественным обобщением понятия покоя отдельной материальной точки. Соответственно скорость, даваемая формулой (4.2), приобретает смысл скорости «***движения как целого***» механической системы с отличным от нуля импульсом.

Мы видим, таким образом, что закон сохранения импульса позволяет естественным образом сформулировать понятия покоя и скорости механической системы как целого.

ВАЖНО! Формула (4.2) показывает, что связь между импульсом *P*и скоростью *V*

|  |
| --- |

системы как целого такая же, какая была бы между импульсом и скоростью одной материальной точки с массой =∑

μ *mn*, равной сумме масс всех частиц в системе. Это

*n*

обстоятельство можно сформулировать как утверждение об ***аддитивности массы***. может быть получена как полная производная по времени от радиус  Скорость *VЦИ*

вектора, задваемого следующим выражением:

10

Иванов И.А., Механика и теория упругости



| ∑  *m R*      *n n*  *R*  =  *n*  ∑  *ЦИ m*  *n*  *n* |
| --- |

. (4.3)

Можно сказать, что скорость системы как целого, есть скорость перемещения в пространстве точки с массой, равное сумме масс всех частиц в нее входящих, радиус вектор которой дается формулой (4.3). Такую точку называют *центром инерции системы*.

| ОПРЕДЕЛЕНИЕ |
| --- |

**Центр инерции** геометрическая точка, характеризующая

движение тела или системы частиц как целого.

Исходя из вышесказанного, закон сохранения импульса замкнутой системы можно сформулировать как утверждение о том, что ее центр инерции или покоится или движется прямолинейно и равномерно. В таком виде это есть обобщение закона инерции, который был выведен12 для одной свободной материальной точки, «центр инерции» которой совпадает с ней самой.

При изучении механических свойств замкнутой системы естественно пользоваться той системой отсчета, в которой ее центр инерции покоится. Тем самым упрощая математические выкладки, в которых исключается из рассмотрения равномерное и прямолинейное движение системы как целого.

**§5. Преобразование энергии при переходе между различными инерциальными системами отсчета**

Введем понятие внутренней энергии.

| ОПРЕДЕЛЕНИЕ |
| --- |

Энергию покоящейся как целое механической системы

называют ее **внутренней энергией**.

Найдем закон преобразования энергии при переходе от инерциальной системы *K* относительно

отсчета к другой инерциальной системе *K*′, двигающейся со скоростью *VK*′

12 См. §6 главы 1

11

Иванов И.А., Механика и теория упругости

первой. Пусть в системе отсчета *K*рассматриваемая механическая система покоится как целое, то есть ее полный импульс равен нулю. Обозначим через*Eвнутр*.ее внутреннюю энергию. Тогда

1  

1

*E* = ∑*m V* +*U* = ∑*m* (*Vn*′ +*VK*′) +*U* =

2

2

*внутр n*

.2

2 1

*n n*

*n*

*n*

= ∑*m* (*Vn*′ + *Vn*′ *VK*′ +*VK*′)+*U* = 2 2

2

1

*n*

*n*

1

2 ,

1

= ∑*m V*′ + ∑*m V*′ *V* ′ + ∑*m V* ′ +*U* = 2 2

2 ,

*n n K*

2

*n*

*n n*

*n K*

2

2

*n*

*n*

 

′

12

′∑ ′ ∑ ∑ = + ′ +

2

*V m V m V*

*m V*

*K n U*

2

,

*K n*

*n*

 

*n n* 2

+ ⇒

  

*n*

*n*

μ

*n*

= ′ = ′

*P*

*Eвнутр*

.

| ′ μ    2  *V*  ⇒ *E* = + ′ + ′ *внутр V P E*  .,  *K*  ′  2*K внутр*  . |
| --- |

где= ∑

,(5.1)

μ *mn*- полная масса рассматриваемой механической системы.

*n*

**§6. Закон сохранения момента импульса**

Перейдем к выводу закона сохранения, возникновение которого связано с изотропией пространства. Рассмотрим замкнутую механическую систему, состоящую из *N* частиц. Изотропия пространства означает, что механические свойства замкнутой системы не меняются при любом её повороте как целого. В соответствии с этим, рассмотрим бесконечно малый поворот механической системы и потребуем, чтобы ее функция

Лагранжа при этом не изменилась13.

13 Соображения, по которым δ*L* = 0аналогичны тем, которые обсуждались в §3 настоящей главы

12

Иванов И.А., Механика и теория упругости

Введем вектор δϕбесконечно малого поворота, абсолютная величина которого

равна углу δϕповорота, а направление совпадает с осью поворота (причем так, что направление поворота отвечает правилу винта по отношению к направлению δϕ).



Рис. 6.1.

Найдем, прежде всего, чему равно при таком повороте приращение радиус-вектора, проведенного из общего начала координат (расположенного на оси вращения) к какой либо из материальных точек поворачиваемой системы. Линейное перемещение конца радиус-вектора связано с углом соотношением (рис. 6.1)

.

δ*R* = *R*⋅sinθ ⋅δϕ

Направление же вектора *R*

δперпендикулярно к плоскости, проходящей через *R*и

δϕ. Поэтому ясно, что



*R* [ *R*]

δ = δϕ, . (6.1)

При повороте системы меняется направление не только радиус-векторов, но и скорости всех частиц, причем все векторы преобразуются по одинаковому закону. Поэтому приращение скорости относительно неподвижной системы координат



*V* [ *V*]

δ = δϕ, . (6.2)

13

Иванов И.А., Механика и теория упругости

Подставим эти выражения в условие неизменяемости функции Лагранжа при повороте:

       

*L* = *L*(*R*′ *Rn*′ *V*′ *Vn*′)− *L*(*R Rn V Vn* )=

,..., , ,..., ,..., , ,..., δ 1 1 1 1

           

= *L*(*R* + *R Rn* + *R V* + *V Vn* + *V*)− *L*(*R Rn V Vn* )=

,..., , ,..., ,..., , ,..., 1 δ δ 1 δ δ 1 1

 

*L R V*



( ) =⎟⎟⎠⎞

⎜⎜⎝⎛∂∂

∂

=∑

*L* 

*L* 

δ , ,δ ,δ

*n*

+

∂

*R*

*n*

*R*

*n*

*V n*

*V n*

*L*    

⎜⎜⎝⎛∂∂

⎟⎟⎠⎞

∂

= ∑

*L*

,[ , ] ,[ , ] = 0

 δϕ δϕ

+

∂

*R*

*n*

*n*

*L* 

*R*

*n*



*V n*

*V n*

∂и*n*

*L* 

∂получим:

 =

*p*

 =

*p*

Заменив производные *n* ∂

∂

*R*

*n*

*V*

*n*



  

=∑( ,[ , ] + ,[ , ] )= 0

δ δϕ δϕ .

*L pn Rn pn Vn*

*n*

Далее сделаем циклическую перестановку14 множителей и вынесемδϕза знак суммы:

  

⎜⎜⎜⎜⎜⎝⎛⎥⎦⎤

⎟⎟⎟⎟⎟⎠⎞



     

*d*

⎢⎣⎡

([ ] [ ])

= ∑ + = ∑

+⎥⎦⎤

⎢⎣⎡

*d*

δ δϕ, , , δϕ, , ,

*L R p V p R p*

*R p*

⇒

*n n n n*

*n n n n*

*dt*

*dt*

*n*

 *n*

*d td*

,



[ ]

*R p*

*n n*

*L*  

*d*

=, ∑[ , ] = 0.

δ δϕ

*dt*

*Rn pn*

*n*

Ввиду произвольности δϕотсюда следует, что [ , ] 0 



*d*.

∑ =

*dt*

*n*

Интегрируя последнее равенство получим:

14*a*,[*b*,*c*] *b*,[*c*,*a*] *c*,[*a*,*b*]

*Rn pn*





= =



   

14

Иванов И.А., Механика и теория упругости

, .



[ ]→

∑ *R p* = *const*

*n n*

*n*

,через букву *M*:



Обозначим ∑[ ]

*Rn pn*

*n*

|  ,    [ ]→  *M* = ∑ *R p* = *const*  *n n*  *n* |
| --- |

. (6.3)

Таким образом, мы приходим к выводу о том, что в замкнутой механической системе векторная величина*M*остается неизменной при движении.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ Векторную величину *M*, определяемую по формуле (6.3),

|  |
| --- |

называют **моментом импульса системы** (или просто моментом).

Аддитивность момента импульса следует непосредственно из его определяющей формулы (6.3). Это означает, что неизменность момента импульса механической системы можно считать законом сохранения, который так и называется: **закон сохранения момента импульса**.

| ВАЖНО |
| --- |

Хотя закон сохранения всех трех компонент момента (относительно

произвольного начала координат) имеет место только для замкнутой системы, в более ограниченном виде этот закон может иметь место и для систем, находящихся во внешнем поле. Из приведенного выше вывода очевидно, что всегда сохраняется проекция момента на такую ось, относительно которой данное поле симметрично, и потому механические свойства системы не меняются при любом повороте вокруг этой оси; при этом, конечно, момент должен быть определен относительно какой-нибудь точки (начала координат), лежащей на этой же оси.

Наиболее важным случаем такого рода является поле с центральной симметрией, т.е. поле, в котором потенциальная энергия зависит только от расстояния до некоторой определенной точки (центра) в пространстве. Очевидно, что при движении в таком поле

сохраняется проекция момента на любую ось, проходящую через центр. Другими словами, сохраняется вектор *M*момента, но определенного не относительно произвольной точки пространства, а относительно центра поля.

15

Иванов И.А., Механика и теория упругости

**§7. Преобразование момента импульса при переходе между различными инерциальными системами отсчета**

Поскольку в определение момента входят радиус-вектор частиц, то его значение, вообще говоря, зависит от выбора начала координат. Посмотрим, как изменяется момент

импульса при переходе от системы отсчета *K*к системе отсчета *K*′, смещенной и *Rn*′- радиус-векторы одной и той же точки в

относительно *K*на вектор ε. Пусть *Rn*

системах отсчета *K*и *K*′соответственно. Следовательно эти радиус-векторы смещены на  

друг относительно друга на вектор εи, очевидно, связаны соотношением ε *Rn*= *Rn*′ + .

Поэтому:

 , ε , , ε ,

 

  

  

=∑[ ]=∑[ ′ + ]=∑[ ′ ]+∑[ ]= *M Rn pn R p R p p*

*n n*

*n*

*n n*

*n*

*n*

*n*

*n*





⎢⎢⎢⎢⎣⎡

 

⎥⎥⎥⎥⎦⎤

[ ]

=∑ ′ + ∑

*Rn*, *pn*ε , *p*

*n*

 *n*

 *n*

 *P*

′

*M*

или

, (7.1)

| *M M* [ *P*] =′ + ε , |
| --- |

- полный импульс системы.

где =∑



*P pn*

*n*

ВАЖНО! Из этой формулы видно, что только в том случае, когда система как целое

|  |
| --- |

 

покоится (т.е. 0

*P* =), ее момент не зависит от выбора начала координат. На законе сохранения момента эта неопределенность его значения, разумеется, не сказывается, так как у замкнутой системы импульс тоже сохраняется.

Выведем также формулу, связывающую значения момента импульса в двух

различных инерциальных системах отсчета *K*и *K*′, вторая из которых движется . Тогда радиус-векторы частиц в этих системах

относительно первой со скоростью *VK*′

  , a скорости cвязаны выражением

*n n* + *K*′ =′

отсчета будут связаны соотношением *R R V t*

  . Поэтому:

*Vn Vn* +*VK*′ =′

 , , ,

      

=∑[ ]=∑ [ ]=∑ [ ′ + ′⋅ ′ + ′]=

*M Rn pn m R V m R V t V V*

*n n n*

*n*

*n n K n K*

*n*

*n*

16

Иванов И.А., Механика и теория упругости

       

=∑ ([ ′ ′]+ [ ′′]+ [ ′⋅ ′]+ [ ′⋅′])= *n n n n K K n K VK m R V R V V t V V t*

, , , ,

*n*

        =∑ [ ′ ′]+∑ [ ′′]+∑ [ ′⋅ ′]+∑ [ ′⋅′]=

*mn Rn Vn m R V m V t V m V t V* , , , ,

*n n K*

*n*

*n K n*

*n*

*n K K*

*n*

*n*

⎢⎢⎣⎡

⎥⎥⎦⎤

⎢⎢⎣⎡

⎥⎥⎦⎤

        [ ] + [ ]=

= ∑ ′ ′ ∑ ∑ ∑ + ′ + ′

*Rn mnVn m R V t V m V m t V V* , , , ,

*n n K*

′ ′

*K n n*



′ ′

*n K K*

  0

*np*

*n*

*np*

′*n*

′

=

*n n*

, , ,

   

*Rn pn m R V t V p*

=∑[ ′ ′]+∑ [ ′′]+∑ [ ′′]=

*n n K*

*n*

*K n*

*n*

*n*

 

⎢⎢⎢⎢⎣⎡

  



⎥⎥⎥⎥⎦⎤

[ ] [ ] = ∑ ∑ ∑ = ′ + ′ + ′ *mn Rn*,*Vn m R* ,*V t V* , *p*

 *n*

*n n K*

*n*

′ ′

*K n*



*n*

 *P*

*M*

′

′

     *M m* [*R V* ] *t*[*V P* ] *K*

=′ + ′ + ′ ∑ ′ ′

, , .

*n n K*

*n*

Введем, согласно (4.3), радиус-вектор центра инерции:            =′ +∑ [ ′′]+ [ ′′]=′ +∑ [ ′]+ [ ′′]=

*M M mn Rn VKt V P M m R V t V P*

, , , ,

*K n n K K*

*n*

*n*

    

⎢⎣⎡

+ [ ′]= ⎥⎦⎤

=′ + ′ *M* ∑*m R VK*′*t VK*′ *P*

*n n*

*n*

, ,

∑ ∑∑′ ′ *P*

⎢⎢⎢⎣⎡

*m*

⎥⎥⎥⎦⎤

⎢⎢⎢⎣⎡

∑

*m*

⎥⎥⎥⎦⎤

*n*     

*n*

= ′ + ′∑

*M*

+ ′

*m R V t V*

*n n*

*m*

*n*

, ,

*K K*

*n*

*n n*

*n n*

*m*

*n*

=

⎢⎢⎢⎢⎢⎢⎣⎡′ 

⎥⎥⎥⎥⎥⎥⎦⎤

⎢⎢⎢⎢⎢⎢⎣⎡′

⎥⎥⎥⎥⎥⎥⎦⎤

∑ ∑∑





*m R n n*





*P*

∑ ′ ′

= ′ +∑

*M m* , , *V t m V*

*n*

+

⇒

*n m*

 *n*

*m*

*n*

 *n*

*K n* 

*n*

*K*

*n*



*n*

μ μ

 

*Ц И VЦ И R*

(7.1`)

| [ ] [ ]*ЦИ K VK VЦИ M M R V t* ′ ′ ⇒ =′ + μ + μ ⋅, , |
| --- |

или

17

Иванов И.А., Механика и теория упругости

. (7.1``)

| *M M* [*R V* ] *t*[*V P* ]*ЦИ K K* =′+ + ′ μ , ,  ′ ′ |
| --- |

ВАЖНО Эта формула определяет закон преобразования момента импульса при переходе

|  |
| --- |

от одной системы отсчета к другой, подобно тому, как для импульса и энергии аналогичные законы даются формулами (4.1) и (5.1).

ВАЖНО Другими словами, момент импульса *M*механической системы складывается из

|  |
| --- |

ее «собственного момента» относительно системы отсчета, в которой она покоится, и    

момента[ ] [ ] *ЦИ K VK VЦИ R V t*

′ ′ μ + μ ⋅, связанного с ее движением как целого.

, ,

**§8. Заключение**

В заключении, просуммируем все изученные закона сохранения.

ЗАКОН Закон сохранения энергии заключается в том, что энергия замкнутой системы

|  |
| --- |

сохраняется.

ЗАКОН Закон сохранения импульса заключается в том, что векторная сумма импульсов

|  |
| --- |

всех тел замкнутой системы сохраняется.

ЗАКОН Закон сохранения момента импульса заключается в том, что векторная сумма

|  |
| --- |

моментов импульсов всех тел замкнутой системы сохраняется.

Этим исчерпываются аддитивные интегралы движения. Таким образом, всякая замкнутая система имеет всего семь таких интегралов: энергия и по три компоненты векторов импульса и момента импульса.

18

Иванов И.А., Механика и теория упругости

Глава 3. Интегрирование уравнений движения

**Оглавление**

§1. Одномерное движение....................................................................................................................2 §2. Задача двух тел, приведенная масса..............................................................................................4 §3. Движение в центральном поле.......................................................................................................6 §4. Кеплерова задача...........................................................................................................................12

1

Иванов И.А., Механика и теория упругости

**§1. Одномерное движение**

Перед нами стоит задача найти закон движения механической для случая одномерного движения. Одномерным называют движение системы с одной степенью свободы. Конечно, можно решать эту задачу для каждого конкретного случая по стандартной схеме: записать функцию Лагранжа, составить уравнения Лагранжа и проинтегрировать получившиеся дифференциальные уравнения.

Но эта задача может быть решена в общем виде исходя из закона сохранения энергии. Для удобства запишем функцию Лагранжа в декартовых координатах:

*.* (1.1)

*mx*

2

*U*(*x*)

*L* = −

2

Найдем закон движения для механической системы, описываемой функцией (1.2). Запишем для рассматриваемой системы закон сохранения энергии:

2*.* (1.2)

*mx*

*U*(*x*) *const*

*E* = + =

2

Это есть дифференциальное уравнение первого порядка, интегрирующееся путем разделения переменных:

= [*E* −*U*(*x*)]⇒

*mx*

2

= *E* −*U*(*x*)⇒

*x*2 2

2

*x*2



*m*

*dx* 2

⇒ = ± [*E* −*U*(*x*)] ⇒

 = ± [*E* −*U*(*x*)] ⇒

*m*

*dx dt* 2

*dt m*

*dx dt*2

⇒ = ± [*E* −*U*(*x*)] ⇒ *m*

= ±

*m*

⇒

[ ( )] *E U x*

−

*t*

*x*

*t*

*dx dt*

*x*

*dx dt*

⇒ = ± ∫ ∫

⇒

= ± ∫ ∫

0 02[ ( )]⇒

[ ( )]

*t E U x* −

0 02

*t E U x*

*x*

*m*

*x*

*m*

−

| *x*  *m dx*  ∫−  ⇒ − = ±  *t t*  0  ( )  2  *x E U x*  0 |
| --- |

, (1.3)

2

Иванов И.А., Механика и теория упругости

*x*, координата в момент времени 0*t* . Где знак “+”или “ −”

где 0*t* - время начала отсчета, а 0

определяется знаком скорости в начальный момент времени.

Выразив из формулы (1.3) координату через время получим искомый закон движения, записанный, правда, в неявной форме.

Проанализируем характер движения частицы. Поскольку кинетическая энергия — величина положительная, то при движении полная энергия всегда больше потенциальной, т.е. движение может происходить только в тех областях пространства, где *U*(*x*) < *Е*. В области *U*(*x*) ≥ *Е* – движение в классической механике невозможно.

Рассмотрим движение частицы в поле *U*(*x*), показанном на рисунке 1.1. Проведя на этом же графике горизонтальную прямую, соответствующую заданному значению полной энергии, мы сразу же выясним возможные области движения. Так в изображенном на рис. 1.1 случае движение может происходить лишь в области *АВ* или в области справа от *С*.



Рис. 1.1

Точки, в которых потенциальная энергия равна полной

*U*(*x*) = *Е*, (1.4)

определяют границы движения. Они называются **точками останова**, поскольку в них кинетическая энергия и, как следствие, скорость обращается в нуль. Часто эти точки называют ***точками поворота***.

Если область движения ограничена двумя такими точками, то движение происходит в ограниченной области пространства; оно является, как говорят, **финитным**. Если же область движения не ограничена или ограничена лишь с одной стороны, —

3

Иванов И.А., Механика и теория упругости

движение **инфинитно**, частица уходит на бесконечность. Одномерное финитное движение является колебательным — частица совершает периодически повторяющееся движение между двумя границами (на рис. 1.1 в потенциальной яме АВ между точками *х*1 и *х*2). При этом согласно общему свойству обратимости время движения от *х*1 до *х*2 равно времени обратного движения от *х*2 до *х*1. Поэтому период колебания *T*, т.е. время, за которое точка пройдет от *х*1 до *х*2 и обратно, равен удвоенному времени прохождения отрезка *х*1*х*2 или согласно (1.3) равен:

( )

*x E*

*m dx T*2

∫−

=

2 *,* (1.5)

2

( ) ( )

*x E E U x* 1

причем пределы *х*1 до *х*2 являются корнями уравнения (1.4) при данном значении *Е*. То есть формула (1.5) определяет период движения в зависимости от полной энергии частицы.

**§2. Задача двух тел, приведенная масса**

Полное решение в общем виде допускает чрезвычайно важная задача о движении системы, состоящей всего из двух взаимодействующих частиц. Такая задача называется **задачей двух тел**. Таким образом, наша задача найти закон движения для системы из двух взаимодействующих частиц.

Потенциальная энергия взаимодействия двух частиц зависит лишь от расстояния между ними, т.е. от абсолютной величины разности их радиус-векторов. Поэтому лагранжева функция такой системы





*L* 

2

*m R m R*

2

( ) 1 2

= + − − *.* (2.1) 2 2*U R R*

1 1

2 2

Введем вектор взаимного расстояния обеих точек

  

*R R*1 *R*2

= − .

Поместим начало координат в центре инерции. Согласно определению1, это означает, что

  

*m R* + *m R* = .

1 1 2 2 0

1 См. §4 главы 2

4

Иванов И.А., Механика и теория упругости

Из двух последних равенств составим систему линейных алгебраических уравнений относительно*R*1и *R*2

. Решаем ее:

  

⎪⎨⎧+ =

   ⎪⎨⎧= −

*R R R*

= +

1 2

*R R R*  = −

⇔

⎪⎩

1 2

   *m R m R*



*R*

*m R* 2 2

⇔

0*m*

1 1 2 2

⎪⎩

1

1

⇔

   ⎪⎨⎧+ = −

*R R R*

= +

1 2  



⇔

  

⎪⎨⎧+ = −

*R R R*

= +

1 2

⇔

⎪⎩

*R R*

2

*m R* 2 2

*m*

1

   ⎪⎩

*m R m R m R* 1 1 2 2 2

  

⎪⎨⎧= − −

  

⎪⎨⎧= − −

*R R R*  

⇔

⇔

⎪⎩

= +

1 2

   *m R m R m R*

⇔

⎪⎩

*R R R*

= +

1 2

*m R m R m R*

1 2 2 1 2

  

⎪⎨⎧+ = −

⎪⎨⎧

1 2 2 1 2

  

*R R R*

= +

*R R R* 

= +

1 2

1 2

⇔*R* ( )⇔

  ⎪⎩

⇔

*R*

= −

*m*

1

*R m m m R*

⎪⎩

2

2 2 1 1

*m m*

+

2 1

  

 

⇔

⎪⎪⎨⎧

*R R*

= + −

1

*m*

1

*m m*

+

2 1

*R*

=

⇔

⎪⎪⎨⎧

*R* 1

*m*

2

*m m*

+

2 1

*R*

⇔

 

 

⎪⎪⎩

*R*

2

= −

*m*

1

*m m*

+

2 1

*R*

⎪⎪⎩

*R*

2

= −

*m*

1

*m m*

+

2 1

*R*

 

=

⇔

⎪⎪⎨⎧

*R*

1

*.* (2.2)

*m*

2

*m m*

+

2 1

*R*

 

⎪⎪⎩

*R*

2

= −

*m*

1

*m m*

+

2 1

*R*

Подставляя эти выражения в (2.1), получим:

⎜⎜⎝⎛+

*m m*



2

+ ⎟⎟⎠⎞

*m m* ⎜⎜⎝⎛+



⎞

2

⎟⎟ − ( ) ⇔

*L*

= *R U R*

1 2

*R*

2 1

2 2

*m m*

2 1

*m m* 2 1

⎠

1 

*m m*

2



1

2

*m m*

( ) ( )− ( )⇔

*L*2

2 1

⇔ = *R U R*

2

1 2

*m m*

+

2 1

2

*R*

+

2

2

*m m*

+

2 1

2

1 

*m m*

( )( + ) − ( )⇔

*L*2

⇔ = *m m R U R* 1 2

2

*m m*

+

2 1

2 2 1

5

Иванов И.А., Механика и теория упругости

1  *m m*

2

− ( )⇔

⇔ = *R U R*

*L*

2

1 2

*m m*

+



2 1

*m*

*.*(2.3)

где введено обозначение

|    2  *U*(*R*)*mR*  ⇔ *L* = −  2 |
| --- |

| *m m*  *m*+  =  1 2  *m m*  2 1 |
| --- |

*.* (2.4)

| ОПРЕДЕЛНИЕ |
| --- |

Величина *m*, определяемая по формуле (2.4), называется

**приведенной массой**.

Функция (2.3) формально совпадает с функцией Лагранжа одной материальной точки с массой *m*, движущейся во внешнем поле *U*(*R*)симметричном относительно неподвижного начала координат.

ВАЖНО Таким образом, задача о движении двух взаимодействующих материальных

|  |
| --- |

точек сводится к решению задачи о движении одной точки в заданном внешнем поле

 

 

=этой задачи законы движения каждой из частиц *R R* (*t*) 1 1

*U*(*R*). По решению *R R*(*t*)  

*R R* (*t*) 2 2

=и

=в отдельности (по отношению к их общему центру инерции) получаются по формулам (2.2).

**§3. Движение в центральном поле**

Сведя задачу о движении двух тел к задаче о движении одного тела, мы пришли к

вопросу об определении движения частицы во внешнем поле, в котором ее потенциальная энергия зависит только от расстояния *R*до определенной неподвижной точки; такое поле называют **центральным**. Сила



( )*RU* ∂

*F R* 

= − ,

∂

действующая на частицу, по абсолютной величине зависит при этом тоже только от *R*и направлена в каждой точке вдоль радиус-вектора.

6

Иванов И.А., Механика и теория упругости

Наша задача найти в общем виде закон движения частицы в центральном поле. Для решения поставленной задачи учтем результаты предыдущего параграфа и воспользуемся законами сохранения момента импульса и энергии.

Как было уже показано2, при движении в центральном поле сохраняется момент системы относительно центра поля. Для одной частицы это есть

  

*M* [*R P*]

=, .

Поскольку векторы *M*и*P*взаимно перпендикулярны, постоянство *M*означает, что при движении частицы ее радиус-вектор*R*все время остается в одной плоскости - плоскости, перпендикулярной к *M*.

Таким образом, траектория движения частицы в центральном поле лежит целиком в одной плоскости. Повернем систему отсчета так, чтобы оси *X* и *Y* лежали в плоскости движения. Так как движение происходит в одной плоскости *XY*, то всегда *z* = 0. Перейдем в плоскости движения к полярным координатам *r* , ϕи *z* (см. рис. 3.1).:

  

*x r r*

= ⋅ − ⋅ ⋅

cos sin

⎪⎨⎧

*x r*

= ⋅

*y r*

cos

ϕ

ϕ ϕ ϕ

и ⎪⎩⎪⎨⎧== ⋅ + ⋅ ⋅

  

*y r r*

sin cos

ϕ ϕ ϕ

= ⋅

⎪⎩

sin

ϕ



*z*

=

0

*z*

0



Рис. 3.1

2 См. §4 главы 2

7

Иванов И.А., Механика и теория упругости

Запишем закон сохранения для рассматриваемой механической системы в полярных координатах:

( )+ =

  

2 2 2 2

*mV E*2 2

*m x y z*

+ +

= + = *U*

*U*

([ ] [ ] )+ =

2 2 2

 ϕ ϕ ϕ  ϕ ϕ ϕ

*m r r r r*

⋅ − ⋅ ⋅ + ⋅ + ⋅ ⋅ +

cos sin sin cos 0

= *U*

2

( ) + ⇒

 ϕ  ϕ ϕ ϕ ϕ ϕ  ϕ  ϕ ϕ ϕ ϕ ϕ cos 2 cos sin sin sin 2 sin cos cos 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 *m r r r r r r r r*

⋅ − ⋅ ⋅ ⋅ ⋅ ⋅ + ⋅ ⋅ + ⋅ + ⋅ ⋅ ⋅ ⋅ ⋅ + ⋅ ⋅ = *U* 2

| ( ) *U*(*r*)*m r r*   ϕ  2 2 2  +  ⇒ =2  *E* + |
| --- |

*.* (3.1)

Аналогично, запишем закон сохранения момента импульса:

  

   *i j k*

   *i j k*

= [ ]= = = *M R P*

, 0



*x y z*   

*mx my mz* 

*x y*

 

*mx my* 

0

*i*00

*y*

0

*x*

*x y*

= − + =



*my*

0

*j*



*mx*

*k*

 

*mx my*







*Mx M y Mz*

  

= ⋅ − ⋅ + ( ⋅ − ⋅ )⇒

 

*i* 0 *j* 0 *k x my y mx*



*Mz*

*Mz*= *x* ⋅*my* − *y* ⋅*mx*=

= *m*(*r*⋅cosϕ ⋅[*r*⋅sinϕ + *r*⋅ϕ⋅sinϕ]−*r*⋅sinϕ⋅[*r*⋅cosϕ −*r*⋅ϕ⋅sinϕ]) = = ( ⋅ ϕ ⋅ ⋅ ϕ + ⋅ϕ ⋅ ϕ − ⋅ ϕ ⋅ ⋅ ϕ ⋅ ⋅ ϕ + ⋅ϕ ⋅ ϕ)= *m r* cos *r* sin *r*cos *r* sin *r*cos *r* sin *r* sin 2 2 2 2

= ( ⋅ ⋅ + ⋅ ⋅ )= ⋅ ⋅ ( +)⇒

  

2 2 2 2 2 2 2

*m r* ϕ cos ϕ *r* ϕ sin ϕ *m r* ϕ cos ϕ sin ϕ

 

1

| ⇒ = ⋅ ⋅ϕ  2 *M m r*  *z* |
| --- |

*.* (3.2)

В силу закона сохранения импульса, единственная отличная от нуля проекция момента импульса *M z*сохраняется, то есть*Mz*= *m*⋅*r* ⋅ϕ= *const* ≡ *M*

2.

Выразим ϕиз (3.2) и подставим в (3.1):

8

Иванов И.А., Механика и теория упругости

⎜⎜⎝⎛⎥⎦⎤

2

*M*

⎟⎟⎠⎞



2 2

⎢⎣⎡⋅

ϕ

*M*

*m r r* +

*m r*

2

+ ( ) =

= *U r* ⇒ =

*m r* ⋅

2

*E*

⎜⎜⎝⎛⋅

2

2 ⎟⎟⎠⎞



2 2

*M*

*m r r* +

2 4

*m r*

+ ( )⇒

= *U r* 2

Выразим из (3.3) *r*:

|   2 2  *mr M E* +  *U*(*r*)*m r*  ⇒ = + 2  2 2  ⋅ |
| --- |

*.* (3.3)

2

*r*

2

2

⎜⎜⎝⎛⋅ *M E U*

⎞

⎟⎟ ⇔

= − − 2

*m*

2

*m r*

⎠

2

⎜⎜⎝⎛⋅

2

*M*

⎟⎟⎠⎞

*r* , ⇔ = ± − − 2

*m*

*E U*

2

*m r*

где знак “+” или “ −” определяется знаком скорости в начальный момент времени. Далее, для удобства, будем “ ± ” будем опускать:

2

⎜⎜⎝⎛⋅

2

*M E U*

⎟⎟⎠⎞

*r* . = − − 2

*m*

2

*m r*

Далее, разделяя переменные и интегрируя, имеем:

*dr*

*r*

2

⎜⎜⎝⎛⋅

2

*M E U*

⎞

⎟⎟ ⇒

≡ = − − 2

*dt m*

2

*m r*

⎠

2

⎜⎜⎝⎛⋅

2

*M E U*

⎞

⎟⎟ ⇒

⇒ = − − 2

*dr dt*

*m*

2

*m r*

⎠

*dr dt*

⇒ =

2

⎜⎜⎝⎛⋅

2

*M E U*

⎟⎟⎠⎞

⇒

(3.4)

*m*

− −

2

*m r*

2

9

Иванов И.А., Механика и теория упругости

*t*

⇒ = ∫ ∫*r*

*dr dt*

⇔

*t*

*r*

0 0

2

⎜⎜⎝⎛⋅

2

*M E U* − −

⎟⎟⎠⎞

*m*

2

*m r*

2

| *r*  *dr*  ⇔ = ∫  *t*  +  *t*  0  ⎜⎜⎝⎛⋅  ⎟⎟⎠⎞  2  2  *M E U*  *r*  − −  0  2  *m*  2  *m r* |
| --- |

*.*(3.5)

Соотношение (3.5) связывает в общем виде *r*и время *t*, то есть является искомым законом движения, правда, записанным в неявном виде.

Если из формулы (3.2) выразить *dt* и подставить его в формулу (3.4), то, проинтегрировав, можно получить соотношение, связывающее между собой координаты, то есть траекторию движения. Действительно:

*d M m r M m r*ϕ



2 2

= ⋅ ⋅ ⇔ = ⋅ ⋅ ⇒

ϕ

*d*

ϕ

*M*

*dt*

*M d*

⇔ = *dt* ⇒ =

ϕ

⇒

*dt*

*m r* ⋅

2 2 *m r*

⋅

2

⋅ ⇒ = .

Далее:

*dt*

*m r M*

*d*ϕ

*dr dt*2

*m r*

⋅

= *d*ϕ

2

⎜⎜⎝⎛⋅

2

*M E U*

⎟⎟⎠⎞

=

*M*

⇒

*m*

− −

2

*m r*

2

*M d*ϕ

*dr*

⇒ = 2 2*r*

⇒

*m*

⎜⎜⎝⎛⋅

2

*M E U*

⎟⎟⎠⎞

ϕ

⇒ = ∫ ∫*r*

*m*

− −

2

*m r*

2

*M d*

*dr*

ϕ

2

*rr*

⇒

⎜⎜⎝⎛⋅ 2

⎟⎟⎠⎞

ϕ

0 0

2

*m E U* − −

2

*M*

*m r*

2

10

Иванов И.А., Механика и теория упругости

| ⇒ = ∫*r*  *M*  *dr*  ϕ +ϕ 2 0  *rr*  ⎜⎜⎝⎛⋅  ⎟⎟⎠⎞  2  *M*  2  *m E U*  − −  0  2  2  *m r* |
| --- |

*.*(3.6)

Повторяясь, отметим, что формулы (3.5) и (3.6) решают в общем виде поставленную задачу. Первая из них представляет закон движения, записанный в неявном виде, а вторая – уравнение траектории движения.

ВАЖНО Закон сохранения энергии (3.3) показывает, что радиальную часть движения

|  |
| --- |

можно рассматривать как одномерное движение в поле с «эффективной» потенциальной энергией (или эффективным потенциалом), определяемым по формуле:

| 2  *M U U r эфф*⋅  ( )2  = +  2*m r* |
| --- |

*.* (3.6)

*M*

2

| ОПРЕДЕЛЕНИЕ Величину |
| --- |

⋅называют центробежной энергией.

2*m r*

2

Значения *r*, при которых*E* =*Uэфф*, определяют границы области движения по расстоянию от центра. При выполнении этого равенства радиальная скорость *r* обращается в нуль. Это не означает остановки частицы (как при истинном одномерном движении), так как угловая скорость ϕне обращается в нуль. Равенство *r*= 0означает «точку поворота» траектории, в которой функция *r*(*t*) переходит от увеличения к уменьшению или наоборот.

Если область допустимого изменения *r* ограничена лишь одним условиемmin *r* ≥ *r* , то движение частицы инфинитно — ее траектория приходит из бесконечности и уходит на бесконечность.

Если область изменения *r* имеет две границы min *r*и max *r* , то движение является финитным и траектория целиком лежит внутри кольца, ограниченного окружностями min max *r* ≤ *r* ≤ *r* . Это, однако, не означает, что траектория непременно является замкнутой кривой.

11

Иванов И.А., Механика и теория упругости



Рис. 3.2

**§4. Кеплерова задача**

****

12

Иванов И.А., Механика и теория упругости



13

Иванов И.А., Механика и теория упругости

14

Иванов И.А., Механика и теория упругости

15

Иванов И.А., Механика и теория упругости

16

Иванов И.А., Механика и теория упругости



17

Иванов И.А., Механика и теория упругости

Глава 4. Столкновения частиц

**Оглавление**

§1. Распад частиц...................................................................................................................................2 §2. Упругие столкновения частиц .......................................................................................................5 §3. Классическая теория рассеяния. Сечение рассеяния.................................................................11 §4. Формула Резерфорда.....................................................................................................................13

1

Иванов И.А., Механика и теория упругости

**§1. Распад частиц**

Уже сами по себе законы сохранения импульса и энергии позволяют сделать во многих случаях ряд важных заключении о свойствах различных механических процессов. При этом особенно существенно то обстоятельство, что эти свойства совершенно не зависят от конкретного рода взаимодействия между участвующими в процессе частицами.

Начнем с процесса, представляющего собой «самопроизвольный» (т.е. без воздействия внешних сил) распад частицы на две «составные части», т.е. на две другие частицы, движущиеся после распада независимо друг от друга.

Прежде чем начать содержательное обсуждение, объединим все характеристики участвующих в распаде частиц в единую таблицу (см. таб. 1.1). Смысл этих величин будет раскрыт ниже.

Таб. 1.1

| *Eвнутр* . | Внутренняя энергия частицы до распада |
| --- | --- |
| *V* | Скорость частицы до распада в л- системе |
| *E*1*внутр* ., *m*1 | Внутренняя энергия и масса первой, образовавшейся после распада, частицы |
| 1 *p*, 1  *v*, θ1 | Импульс, скорость и угол вылета провой, образовавшейся после распада, частицы в л- системе |
| , 01 *v*, θ01  *p*01 | Импульс, скорость и угол вылета провой, образовавшейся после распада, частицы в ц- системе |
| *E*2*внутр* ., *m*2 | Внутренняя энергия и масса второй, образовавшейся после распада, частицы |
| 2 *p*, 2  *v*, θ 2 | Импульс, скорость и угол вылета второй, образовавшейся после распада, частицы в л- системе |
| , 02 *v*, θ02  *p*02 | Импульс, скорость и угол вылета второй, образовавшейся после распада, частицы в ц- системе |

2

Иванов И.А., Механика и теория упругости

Рассмотрим частицу, двигающуюся в лабораторной системе отсчета (л- системе) со скоростью *V*и обладающей внутренней энергией *E*1*внутр* .. Наиболее просто этот процесс выглядит при рассмотрении его в системе отсчета, в котором частица до распада покоилась, то есть системе отсчета, связанной с центром масс двигающейся частицы (ц - системе). Поэтому рассмотрим распад частицы в ц- системе. В силу закона сохранения импульса сумма импульсов обеих образовавшихся в результате распада частиц тоже равна нулю1, т.е. частицы разлетаются с равными и противоположно направленными

и *p*02

 



 

импульсами*p*01

, то есть *p*01 *p*02 0 *p*01 *p*02

+ = ⇔ = − . Их общее абсолютное значение  

(обозначим его *p*0*X p*01 *p*02

= =определяется законом сохранения энергии:

*p*

2

*p*

2

0 1

0 2

*Eвнутр E внутр внутр*

= + + + ⇔

*E*

. 1 .2 2*m*

*m* 1

2 .

2

*p*

2

*p*

2

*X* ⇔ *внутр*=*внутр* + + + , (1.1) *E EX*

0

*E*

0

. 1 .2 2*m* 2 .

*m* 1

*внутр*

2

где *m*1и *m*2массы частиц, образовавшиеся после распада, а *E*1*внутр*. и *E*2*внутр*.- их внутренние энергии. Обозначим буквой ε«энергию распада», т.е. разность внутренних энергий до и после распада

( ) = *Eвнутр*. − *E*1*внутр*. + *E*2*внутр*.

ε .

Очевидно, что эта величина должна быть положительной для того, чтобы распад был вообще возможен. Тогда из (1.1) имеем

*p*

2

*p*

2

*p*

2

⎜⎜⎝⎛

1 1

=⎟⎟⎠⎞

2

*p m m* +

( ) ⇒ ε

= − + = + = +

*E E E*

0

*X X X*

0

0

0

1 2

*внутр внутр внутр m m* . 1 . 2 .2 2 2 2

*m* 1

*m*

2

*m m* 1 2

 1 2

1

*m*

2

*p X*

ε = , (1.2) 0

2

*m*

где *m* - приведенная масса частиц.

ВАЖНО Таким образом, уменьшение внутренней энергии идет на кинетическую энергию

|  |
| --- |

частиц, образовавшихся после распада.

1 Это очевидно, так как в ц- системе до распада общий импульс равен нулю.

3

Иванов И.А., Механика и теория упругости

По формуле (1.2) определяется величина импульса*p*0*X*и скорости частиц в системе центра масс:

*p*

*v* =и

01

10*m*

1

*p*

*v* = *.*

01

20*m*

2

Вернемся обратно к л- системе отсчета, в которой первичная частица движется до распада со скоростью *V*. Рассмотрим одну из распадных частиц и пусть 1

*v*и 10 *v*ее



= +:

скорости соответственно в л- и ц-системах. Из очевидного равенства21 10 *v V v*







2 2

*v*1 −*V* = *v*10 ⇒



*v V v*



⇒ ( − ) = 102 ⇔

2

1

2

1 ⇔ *v* +*V* − 2*vV* cosθ = *v* , (1.3)

1 1 10

где θ1- **угол вылета** рассматриваемой частицы в л- системе по отношению к направлению начальной скорости частицы *V*. Этим уравнением определяется

зависимость скорости ее вылета в л-системе. Она может быть представлена графически с помощью диаграммы, изображенной на рисунке 1.1.

Рис. 1.1.

2 Это преобразование Галилея (см. §7 главы 1)

4

Иванов И.А., Механика и теория упругости

*v*частицы в л-системе дается вектором, проведенным в какую-либо

Скорость 1

точку окружности радиуса 01 *v*из точки *А*, отстоящей на расстояние *V*от центра окружности3. Случаям 01 *V* < *v*и 01 *V* > *v*отвечают соответственно рис. 1.1а и 1.1б. В первом случае относительно л- системы частица может вылететь под любым углом θ1. Во втором же случае частица может вылететь только вперед, под углом θ1, не превышающим значения θ1max, даваемого равенством

1max sinθ

*OE*

= ⇒ *AO*

| *v*01  1max ⇒ sinθ =  *V* |
| --- |

(направление к касательной к окружности, проведенной из точки *A*).

(1.4)

Связь между углами вылета θ1и θ01в л- и ц- системах очевидна из той же диаграммы и дается формулой:

*CD*

*tg*θ1 θ1

*CD*

= ⇒ =*AO OD*

*AD*

*tg*

+

⇒

| *v*  sin  θ  *tg*+  θ*V v*  =  01 01  1cos  θ  01 01 |
| --- |

**§2. Упругие столкновения частиц**

. (1.5)

| ОПРЕДЕЛЕНИЕ |
| --- |

**Столкновением** называется процесс, заключающийся в том, что

взаимодействующие друг с другом частицы, придя из бесконечности (то есть с такого расстояния, при котором взаимодействием можно пренебречь), сближаются, а затем либо расходятся снова на бесконечность, либо остаются на конечном расстоянии друг от друга. В первом случае столкновение называется **рассеянием частиц**, а во втором – **захватом**.

3 Точнее любую точку сферы радиуса 01 *v*, диаметральным сечением которой является изображенная на рис. 1.1 окружность

5

Иванов И.А., Механика и теория упругости

| ОПРЕДЕЛЕНИЕ |
| --- |

Столкновение двух частиц называют **упругим**, если оно не

сопровождается изменением их внутреннего состояния (то есть внутренней энергии).

Рассмотрим упругое столкновение двух частиц. Так же как и в предыдущем параграфе, прежде чем начать содержательное обсуждение, объединим все характеристики участвующих в рассеянии частиц в единую таблицу (см. таб. 2.1). Смысл величин из таблицы будет раскрыт ниже.

Таб. 2.1

| *m*1и *m*2 | Массы частиц, взаимодействующих друг с другом |
| --- | --- |
| 1 *p*, 1  *v* | Импульс и скорость первой частицы в л- системе до взаимодействия |
| , 01 *v*  *p*01 | Импульс и скорость первой частицы в ц- системе до взаимодействия |
| 1 *p*′, 1  *v*′ | Импульс и скорость первой частицы в л- системе после взаимодействия |
| *p*01′, 01 *v*′ | Импульс и скорость первой частицы в ц- системе после взаимодействия |
| 2 *p*, 2  *v* | Импульс и скорость второй частицы в л- системе после взаимодействия |
| , 02 *v*  *p*02 | Импульс и скорость второй частицы в ц- системе до взаимодействия |
| 2 *p*′, 2  *v*′ | Импульс и скорость второй частицы в л- системе после взаимодействия |
| *p*02′, 02 *v*′ | Импульс и скорость второй частицы в ц- системе после взаимодействия |
| 0 *n* | Единичный вектор в направлении скорости 1*v*′ |
| χ | Центральный угол, представляющий собой угол поворота первой частицы в системе центра инерции. |

6

Иванов И.А., Механика и теория упругости

Так как соударение частиц упругое, то при применении закона сохранения энергии можно не учитывать внутренней энергии частиц. Проще всего столкновение выглядит в системе отсчета, в которой центр инерции обеих частиц покоится (ц- система); будем

отличать, как и в предыдущем параграфе, индексом О значения величин в этой системе. *v*в

*v*и 2

Скорости частиц до столкновения в ц- системе связаны с их скоростями 1 лабораторной системе соотношениями4

*v*  *m*

*v*  *m*

=и *v*

*v*

2

10+

*m m*

1 2

  

*v v v*

= − .

где 1 2

= − ,

1

20+

*m m*

1 2

ВАЖНО Из закона сохранения импульса следует, что в ц- системе импульсы обеих

|  |
| --- |

частиц могут отличаться лишь знаком, а в силу закона сохранения энергии остаются неизменными и их абсолютные величины.

Таким образом, результат столкновения сводится в ц- системе к повороту

скоростей обеих частиц, остающихся взаимно противоположными и неизменными по величине. Если обозначить через 0 *n*единичный вектор в направлении скорости 1*v*′ частицы *m*1после столкновения, то скорости обеих частиц после столкновения (отличаем их штрихом) будут

*v* 

′=

*m*

10 *vn* 2

и

0

*m m*

+

1 2

*v*  *m*

(2.1)

′= − . 20 *vn* 1

*m m*

+

1 2

0

Чтобы возвратиться к лабораторной системе отсчета, надо добавить к этим выражениям скорость *V*центра инерции5. Таким образом, для скоростей частиц в л системе после столкновения получаем

4 См. §2 главы 3



 

*V*++

=

5 Согласно определению скорость центра инерции

*m v m v* 1 1 2 2 *m m*

1 2

(см. §4 главы 2)

7

Иванов И.А., Механика и теория упругости

  *m*

  *m v m v*

⎪⎪⎨⎧

*v*

′ =

2

*vn*

+

+

1 1 2 2

1

*m m*

+

1 2

0

*m m*

+

1 2

. (2.2)

  *m*

  *m v m v*

⎪⎪⎩

*v*

′ = − 2

1

*m m*

+

1 2

*vn* 0

+

+

1 1 2 2 *m m*

+

1 2

Этим исчерпываются сведения, которые можно получить о столкновении, исходя

из одних только законов сохранения импульса и энергии. Что касается направления вектора 0 *n*, то он зависит от закона взаимодействия частиц и их взаимного расположения во время столкновения.

Полученные результаты можно интерпретировать геометрически. При этом удобнее перейти от скоростей к импульсам.

Умножив равенства (2.2) соответственно на *m*1и *m*2, получим



*m m*

  

⎪⎪⎪⎨⎧

*m v*

′ =

*vn*

+

*m*

*m v*

+

*m*

*m v*

  

1 1

2 1

*m m* +

1

0

*m m*

+

1

1 1

*m m*

+

2 2

   

*p*

1 2

′

1 2

1 2

*p p*

1 1 2 *m*

⇔



*m m*

  

⎪⎪⎪⎩

*m v*

′ = −

2 1

*vn*

+

*m*

2

*m v*

+

*m*

2

*m v*

  

2 2

*m m* +

0

*m m* +

1 1

*m m* +

2 2

   

*p*

1 2

′

1 2

1 2

*p p*

2 1 2 *m*

   

⎪⎪⎪⎨⎧

′ = +

*p mvn* 1 0

*m*

1

*m m* +

( ) *p p*

+

1 2



1 2

→

*AO*

   

. (2.3)

⎪⎪⎪⎩

′ = − +

*p mvn* 2 0

*m*

2

*m m* +

( ) *p p*

+

1 2



1 2

→

*OB*

*OC mv*

→

=

→  ( )

*AO*++

=

*m p p* 1 1 2 *m m*

1 2

→ ( ) 

*m p p*

*OB*++

=

2 1 2 *m m* 1 2

8

Иванов И.А., Механика и теория упругости

Рис. 2.1.

Построим окружнocть с радиусом *mv*и произведем указанное на рис. 2.1 построение. Если единичный вектор 0 *n*направлен вдоль →

*OC*, то векторы→

*AC*и →

*CB*дают

соответственно импульсы 1 *p*′и 2 *p*′. При заданных1 *p*′и 2 *p*′радиус окружности и положение точек *А* и *В* неизменны, а точка *С* может иметь любое положение на окружности.

Рассмотрим подробнее случай, когда одна из частиц (пусть это будет частица *m2*) *v* =и 2 0

до столкновения покоилась. В этом случае2 0 равна:

*p* =, а длина вектора → *OB*будет

⎜⎜⎝⎛−

=⎟⎟⎠⎞

*OB*     

→

=

*m*

*p*

=

*m*

*m v*

=

*m m*

*v v mv*

2.

*m m*

+

1 2

2

1

*m m*

+

1 2

2 1

1 1

*m m*

+



1 2 

1 2

=

0

Рис. 2.2

То есть длина вектора →

*OB*совпадает с радиусом и точка *B* лежит на окружности.

*AB*совпадает с импульсом 1 *p*первой частицы до рассеяния. При этом точка *А*Вектор же →

9

Иванов И.А., Механика и теория упругости

лежит внутри (если*m*1 < *m*2) или вне (если*m*1 > *m*2) окружности. Соответствующие диаграммы изображены на рис. 2.2а и 2.2б. Указанные на них углы θ1и θ 2представляют

собой углы отклонения частиц после столкновения по отношению к направлению удара (направлению 1 *p*). Центральный же угол, обозначенный на рисунках через χ , дающий направление 0 *n*, представляет собой угол поворота первой частицы в системе центра

инерции. Из рисунка (2.2) очевидно, что углы θ1и θ 2могут быть выражены через угол χ формулами:

*tg*

*CD*

*CD*

*CD*

θ1 θ1 θ1 = ⇔ =

*tg*

*AD*

*AO OD* +

⇔ = *tg*

*OB*

*m*

1

*m*

2

⇔

+

*OD*

⇔ =

*mv*

sin

χ

*v*

sin

χ

*tg*

θ

⇔ =

*m*

*tg*

θ

*m*

⇒

1*v*

*mv*

*mv*

*m*

1

+

cos

χ

1

*v*

1

*m*

+

cos

χ

2

| θ−  π χ  *m*  sin  χ  *tg*+  θcos  = ,2  =  2  1*m m*  2  χ  1 2 |
| --- |

2

. (2.3)

Втрое соотношение получено исходя из того, что Δ*BOC*является равнобедренным и, следовательно, ∠*BOC* = ∠*ABC* =θ2.

Выпишем также формулы, определяющие абсолютные величины скоростей обеих частиц после столкновения через тот же угол χ. Применим теорему косинусов для Δ*AOC*:

*AC*2= *AO*2+*OC*2− 2⋅ *AO*⋅*OC*⋅cos(π − χ)⇔

⇔ *AC*2= *AO*2+*OC*2+ 2⋅ *AO*⋅*OC*⋅cos χ ⇒

⎜⎜⎝⎛+

2

+ ⎟⎟⎠⎞

⎜⎜⎝⎛+

⎟⎟⎠⎞

2

*p*  

*m*

*m*

*m*

*m*

( ) ⋅ ⇒

2 1

⇒ ′= 2 1cos χ

*p*

*p*

+ ⋅

1 *p*

*m m* 1 2

1

2

2

*m m* 1 2

1

2

1

*m m*

+

1 2

*p*

1

⋅

2

*m m*

+

1 2

⎜⎜⎝⎛+⋅ ⇒ ′= 2 cos χ

*m m*

+ ⎟⎟⎠⎞

⎜⎜⎝⎛+⋅ *m m*

⎟⎟⎠⎞

*m m* ⋅

*m m*

2

*m v*

2 1 1

2 1 2

⋅

2 1 1

2

1*v*

1

*m m* 1 2

*v*

1

*m m* 1 2

*v*

1

+ ⋅

*m m*

+

1 2

⋅

2 1

*m m*

+

1 2

⋅ ⋅ ⇒ 1

⎢⎢⎣⎡⋅ ⎥⎥⎦⎤

⎜⎜⎝⎛+ *m*

2

+ ⎟⎟⎠⎞

⎜⎜⎝⎛+ *m*

⎟⎟⎠⎞

2

*m m* ⋅

⇒ ′=2

2 1

*v* χ1 2 cos *v*

2

+ ⋅

( )⋅ ⇒ 2 1

*m m* 1 2

*m m* 1 2

*m m*

+

1 2

2 1

10

Иванов И.А., Механика и теория упругости

| 2  2  + + ⋅ ⋅ ⋅ ⇒ ′= ⋅χ  *m m m m*  2 cos  1  2  2 1  *v v*+  1 1  *m m*  1 2 |
| --- |

. (2.4)

*v*′найдем по теореме синусов из равнобедренного треугольника Δ*OCB*с учетом 2

формулы (2.3) получим:

sinθ2sin χ ⇒

sin sin

= ⇔

θ χ

2

=

*OC CB*

′

*mv m v*

*m m v*

sin⇔ χ

1 2 2 *m v*

sin

χ

⇒ ′=θ

′ =

*v*⇔

1 2 1

2sin *m m m*

*v*

1 1

2π χ + ⎛ −

+

1 2 2 2

(2.3)

*m m* 1 2

sin

⎜⎝

2

⎟⎠⎞

2sin

χ χ

⇔ ′ =

*m v*

sin

χ

*m v*

*v*

′ =

2

cos

2

*v*⇒

1 1

2 χ *m m*

+

⇔

1 1

2 χ *m m*

1 2

cos

2

+

1 2

cos

2

| sin 2  *m v*  χ  ⇒ ′=  *v*+  1 1  2  *m m*  2  1 2 |
| --- |

. (2.5)

| ОПРЕДЕЛЕНИЕ |
| --- |

столкновения.

Сумма θ1 +θ2называется **углом разлета** частиц после 1 2 θ +θ < πпри *m*1 > *m*2.

1 2 θ +θ > πпри *m*1 < *m*2и 2

Очевидно, что 2

**§3. Классическая теория рассеяния. Сечение рассеяния**

Рассмотрим задачу об отклонении однородного пучка частиц, падающих на центр поля из бесконечности и уходящих на бесконечность после взаимодействия с полем. Такая постановка задачи характерна для экспериментов по рассеянию частиц в ядерной физике и физике элементарных частиц. Некоторые аспекты таких опытов можно анализировать с помощью классической механики. Схема опыта по рассеянию частиц приведена на рисунке 3.1.

11

Иванов И.А., Механика и теория упругости

Рис. 3.1.

Все частицы потока, падающего на рассеивающий центр, имеют вдали от центра *v*и летят по параллельным траекториям.

одинаковую скорость ∞

ОПРЕДЕЛЕНИЕ Расстояние от этой траектории до параллельной ей прямой,

|  |
| --- |

проходящей через центр поля, называется **прицельным расстоянием** и обозначается через ρ *.*

Введем плотность потока частиц *n*как отношение числа частиц *dN ,* прошедших через площадку*dS ,* расположенную перпендикулярно потоку, к величине этой площадки:

*dN*

*n* = . (3.1)

*dS*

Поток формируется таким образом, что плотность постоянна по всему поперечному сечению пучка. Рассеянные частицы регистрируются детектором. На опыте измеряется количество частиц *dN*(θ ), отклоненных на различные углыθи попадающих в интервал углов между θиθ + *d*θ *.* Для того чтобы дать интерпретацию опыта, не зависящую от плотности потока падающих частиц, вводят величину*d*σ:

( )

*dN d*θ

σ = . (3.2)

*n*

| ОПРЕДЕЛЕНИЕ Величина |
| --- |

*d*σназывается **эффективным сечением рассеяния*.***

12

Иванов И.А., Механика и теория упругости

Размерность ее равна размерности площади. Если считать, что между углом отклонения частицы и ее прицельным расстоянием существует однозначная зависимость, то эффективное сечение рассеяния равно площади кольца с радиусами ρи ρ + *d*ρ , проходя через которое на большом расстоянии от рассеивающего центра, частицы отклоняются в интервал углов между θи θ + *d*θ *,* то есть

( ) ( )πρ ρ

*dN d* = = = 2 . (3.3)

θ ρ

*dN*

σ *d*

*n*

*n*

Зависимость ρ(θ )может быть рассчитана, если известна потенциальная энергия взаимодействия частиц с полем. Тогда эффективное сечение рассеяния запишется в форме

*d*

ρ

*d* = 2 . (3.4)

σ πρ *d*

θ

*d*

θ

Здесь берется абсолютное значение производной от ρпо θ, так как в большинстве случаев эта производная отрицательна. Эффективное сечение рассеяния как правило выражают через элемент телесного угла *d*Ω*,* заключенного между конусами с растворами θи θ + *d*θ *.* Элемент телесного угла равен *d*Ω = 2π sinθ*d*θ. Подставляя его в (3.4) получим:

. (3.5)

**§4. Формула Резерфорда**

| ρ  *d*θρ  *d*  σsin  = *d*Ω θ  *d* |
| --- |

Найдем эффективное сечение рассеяния для поля отталкивания с потенциальной *U R*α

энергией( )*R*

= *.* Это поле описывает взаимодействие одноименных точечных зарядов

по закону Кулона. На рис. 4.1 показана траектория заряда, налетающего на неподвижный рассеивающий центр. Уравнением траектории является гипербола, задаваемая формулой6

*p*

=. На оси симметрии гиперболыϕ = 0. Введем уголϕ0, отсчитываемый от *r*− +

1 *e*cosϕ

*M*

2

2

*EM*

2

6

*e* = + – параметр и эксцентриситет орбиты (см. §4 главы 3). Параметр орбиты не 1*m*α

*p*

=и 2

*m*α

путать с импульсом!

13

Иванов И.А., Механика и теория упругости

оси симметрии до направления на бесконечно удаленную точку траектории. Значение этого угла можно получить, устремляя *r*к бесконечности в уравнении гиперболы, что дает:

*p*

*p*

cosϕ

*p* 1

*e* ϕ = + ⇒

*r* cos = +1⇒

=1 *e* cosϕ − +

⇒

*r*

⎜⎝⎛

*p*

*er e*

1 1

cosϕ0lim cosϕ lim = = +

⎞

⎟ = ⇒

→∞ →∞ *er e e*

*r r*

| 1  cosϕ0 =  *e* |
| --- |

⎠

. (4.1)



Рис. 4.1.

Из рис 4.1 находим, что

θ = π − 2ϕ0 ⇔

π θ

⇔ϕ = − . (4.2)

0

2 2

Остается выразить эксцентриситет *e* через прицельное расстояниеρ *,* чтобы получить зависимость ρ(θ )и рассчитать эффективное сечение. Для этого запишем законы сохранения энергии и момента импульса налетающей частицы на бесконечно далеком расстоянии от рассеивающего центра:

2

=*mv E*(4.3)

∞

2

14

Иванов И.А., Механика и теория упругости

и

*M mv r*sinα

=∞⇒

ρ

⇒ *M* = *mv*∞ρ . (4.4)

Подставляем (4.3) и (4.4) в выражение для эксцентриситета:

2

*EM*

2

2 4

= + = +*m v*

*e* . (4.5)

2

1 ρ

*m*

2

1

∞

2

α α

Подставляя (4.5) в формулу (4.1) и учитывая связь (4.2) между ϕ0и θ *,* находим зависимостьρ(θ ):

cos

1

⎜⎝⎛

π θ

⎞

1

ϕ*e m v* = ⇒ −

0

1

cos

2 2

⎟ =

⎠

⇒

+

2 4

∞ 2

θ

⇒ =

1

2

α

θ

2

ρ 1

sin

⇒ = sin

2 4

⇒

*m v m v*

2

2

2 41

∞∞ 2

2 4

1

+

ρ

α

2

2

2 4

+

ρ

α

2

*m v m v*

2

1

2

1

⇒ +∞ = ⇒ ∞ = −1⇒

1

ρ

2

α

2

sin

2

θ α

2

ρ

sin

θ

1 sin −

2 2

θ

2

2 4θ

2 4

*m v m v*

2

⇒ =

2

2 2

α*ctg*

ρ

⇒ = ⇒

∞ ∞

ρ

2

sin

2

θ α 2

2

2

2

2 α θ

2

⇒ = ⇒

ρ *ctg*

2 4

*m v*

∞ 2

α θ

ρ *ctg*

= . (4.6) 2

*mv*∞

2

Далее по формуле (3.4) с учетом (4.6) находим эффективное сечение рассеяния: *d*

*d* 2

ρ

σ πρ *d* = θ ⇒

*d*

θ

15

Иванов И.А., Механика и теория упругости

*d*

⎜⎜⎝⎛

α θ

⎟⎟⎠⎞

*mv*

2

*ctg*

*d*2

α θ

⇒ =∞ σ π *d*

2

*mv*

2

*ctg*

2

*d*

θ

θ

⇒

∞

α θ α

1

1

⇒ = ⋅ ⋅ ⋅ ⇒ *d*

σ π *d*

2

*mv*

*ctg*

2 2

θ

θ

2

*mv*

2

sin

2

∞ ∞

2

1

⎜⎜⎝⎛

α

⎞

2

cos

θ 2

1

⇒ = ⋅ ⋅ ⋅

⎟⎟ ⋅ ⋅ ⇒

*d*

σ π *d*

2

2

*mv*

2

θ θ

θ

∞

⎠

sin

2

sin

2

2

| θ  cos  2  ⎜⎜⎝⎛  2⋅⎟⎟⎠⎞  α  2  ⇒ = ⋅  *d*  σ π *d*  θ  θ  *mv*  3  sin  ∞  2 |
| --- |

. (4.7)

Если эффективное сечение рассеяния выражать через телесный угол *d*Ω = 2π sinθ*d*θ, то соотношение (4.7) примет следующий вид:

⎜⎜⎝⎛

2

⋅⎟⎟⎠⎞

cos

θ

σ π*d*

*d*

= ⋅

α

2

Ω

⇒

*mv*

θ π θ

22 sin

∞

sin

3

2

2sin

θ θ

2

cos

2

| 2  ⎜⎜⎝⎛  ⎞  α  1  ⎟⎟ ⋅ Ω  ⇒ =  *d*  σ  *d*  2 θ  *mv*  ⎠  4  sin  ∞  2 |
| --- |

.(4.8)

Первым опытом, в котором измерялось рассеяние частиц, был опыт Резерфорда по рассеянию α - частиц на ядрах атомов золота. Формула (4.8) как раз дает эффективное сечение рассеяния для этого опыта и поэтому называется **формулой Резерфорда*.***

16

Иванов И.А., Механика и теория упругости

Глава 5. Малые колебания

**Оглавление**

§1. Свободные одномерные колебания.....................................................................................................2 §2. Вынужденные колебания .....................................................................................................................6 П.2.1. Общие положения ........................................................................................................................6 П.2.2. Гармоническое внешнее воздействие........................................................................................7 П.2.2. Резонанс.........................................................................................................................................8 §3. Затухающие колебания.........................................................................................................................9 § 4. Вынужденные колебания при наличии трения ...............................................................................12 §5. Колебания систем со многими степенями свободы.........................................................................15

1

Иванов И.А., Механика и теория упругости

**§1. Свободные одномерные колебания**

Очень распространенный тип движения механических систем представляют собой так называемые малые колебания, которые система совершает вблизи своего положения устойчивого равновесия.

| ОПРЕДЕЛЕНИЕ |
| --- |

Положением **устойчивого** равновесия называется такое

положение системы, при котором малое отклонение от положения равновесия приводит к возникновению силы, стремящейся вернуть систему обратно.

Рассмотрение этих движений мы начнем с наиболее простого случая, когда система имеет всего одну степень свободы.

Устойчивому равновесию соответствует такое положение системы, в котором ее потенциальная энергия *U*(*q*)имеет минимум. Отклонение от такого положения приводит к возникновению силы − *dU dq*, стремящейся вернуть систему обратно. Обозначим соответствующее минимуму значение обобщенной координаты через 0 *q* . При малых отклонениях от положения равновесия в разложении1разности ( ) ( ) *U q* −*U q*0по степеням *q* − *q*0достаточно сохранить первый неисчезающий член. В общем случае таковым является член второго порядка2:

*dU U q U q*

2

1 2 *d U*

( ) ≈ ( )+ ( − )+ ( − ) + ⇒

0

*dq*

*q q* 0

...

2

*dq*

2

*q q* 0

*q q*  

=

0

=

0

=

0 0 0

*k*

*k*

( ) ( ) ( )2

*U q* −*U q* ≈ − , (1.1)

2*q q*

0 0

где *k* - положительный коэффициент, равный второй производной потенциальной энергии по координате в точке равновесия:

1 Разложение в ряд Тейлора в общем случае имеет следующий вид:

*df f x f a*

2

1 2 *d f*

1

*n*

*d f*

( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ...

*n*

= + ⋅ − + ⋅ − + + ⋅ − +

*dx*

*x a*

2

*dx*

2

*x a*

...

*n*

!

*dx*

*n*

*x a*

*x a x a*

= = =

*x a*

*dU*, так как в точке *q* = *q*0потенциальная энергия *U*(*q*)имеет минимум.2 0

*dq q* = 0 0

=

2

Иванов И.А., Механика и теория упругости

2

*d U*

*k* . =*dq q*

2

0 =

0

Перенормируем потенциальную энергию таким образом, чтобы потенциальная энергия в положении равновесия обращалась в ноль: *U*(*q*0) = 0.

Введем новую координату *q q*0

*x* = − , представляющую отклонения координаты от

ее равновесного значения. Перейдем в (1.1) к координате *x* . В результате получим: ( )22

*kx U q* = . (1.2)

Кинетическую энергию системы с одной степенью свободы запишем в известном виде:

*T* *mx*

2

= . (1.3)

2

где *m* – масса частицы.

С учетом (1.2) и (1.3) функция Лагранжа рассматриваемой системы, совершающей одномерные малые колебания, будет равна:

|   2 2  *mx kx L* = − 2 2 |
| --- |

*L* =*T* −*U* ⇒, (1.4)

а соответствующее этой функции уравнение движения будет иметь вид:

*d*

∂0

*L*

∂

*L*

*k*

| *x*+ω *x* =  2  0 |
| --- |

*m**x*+ *kx* = 0 ⇒ + *x* = 0 ⇒

*dt*

∂

*x*

−

= ⇒

∂

*x*

*x* , (1.5) *m*

где введено обозначение

. (1.6)

| *k*  ω =  *m* |
| --- |

| ОПРЕДЕЛЕНИЕ |
| --- |

колебаний3.

Величина ωв (1.6) называется **циклической частотой**

3 В теоретической физике ее называют обычно просто частотой, что мы и будем делать в дальнейшем.

3

Иванов И.А., Механика и теория упругости

ВАЖНО Частота является основной характеристикой колебаний, независящей от

|  |
| --- |

начальных условий движения. Согласно формуле (1.6) она всецело определяется свойствами механической системы как таковой.

Подчеркнем, однако, что это свойство частоты связано с предполагаемой малостью колебаний и исчезает при переходе к более высоким приближениям. С математической точки зрения оно связано с квадратичной зависимостью потенциальной энергии от координаты.

Уравнение (1.5) представляет собой хорошо изученное линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Известно, что общее решение этого уравнения имеет следующий вид:

| *x C* cosω*t C* sinω*t* = 1 + 2 |
| --- |

, (1.7)

где *C*1и *C*2некоторые константы, определяемые из начальных условий. Общее решение уравнения (1.5) может быть записано в равносильном (1.7) виде:

| *x* = *a*cos(ω*t* +ϕ) |
| --- |

, (1.8)

где константы*a*и ϕ , определяются из начальных условий.

| ОПРЕДЕЛЕНИЕ |
| --- |

Коэффициент *a*при периодическом множителе в (1.8)

называется **амплитудой** колебаний, а аргумент косинуса (ω*t* +ϕ) — их **фазой**; ϕ есть начальное значение фазы, зависящее, очевидно, от выбора начала отсчета времени.

Найдем связь между константами *C*1и *C*2из (1.7) и *a*и ϕиз (1.8). Преобразуем выражение (1.7):

2

*C C*

2

1

+

( + ) = 2

*x C* cosω*t C* sinω*t*1cosω 2sinω = + = *C t C t*

1 2

2

*C C*

2

1

+

2

⎜⎜⎝⎛+

⎟⎟⎠⎞

2

*C*

2 1

*C*

= + *t C C* cosω sinω

*t*

+

2

1.

2

2

*C C*

2

2

2

1

+

2

*C C*

1

2

4

Иванов И.А., Механика и теория упругости

С другой стороны, согласно (1.8):

*x* = *a*cos(ω*t* +ϕ)= *a*cosω*t* cosϕ − *a*sinω*t*sinϕ .

Таким образом:

⎜⎜⎜⎜⎜⎝⎛+

⎟⎟⎟⎟⎟⎠⎞

2

*C C* +

*C*

2 1

*C*

1*t a t a t* cos sin cos cos sin sin

ω ω ω ϕ ω ϕ

*t*

+

= −

2

.

2

2

*C C* +

2

2

*C C*

2

 

*a*

1

cos

2

1

2

ϕ ϕ

−

sin

Отсюда следует, что произвольные постоянные *a*и ϕсвязаны с постоянными и *C*1 и *C*2соотношениями

| *C*  2  2  *a* = *C*1 +*C* ,  *tg*ϕ = −  2  2  *C*  1 |
| --- |

. (1.9)

Таким образом, вблизи положения устойчивого равновесия система совершает гармоническое колебательное движение.

Найдем энергию системы, совершающей малые колебания:

*mx kx E*

2 2

*E* =*T* +*U* ⇒ = + ⇒

2 2

*m*

⎜⎜⎜⎝⎛

 ⎟⎟⎟⎠⎞ *k*

*m*

 ⇒ = (2+2 2)⇒

2 2

⇒ = +

*E*  ω 2*x x*

*E*

2*x*

*x*

*m*

*m*

ω

*m*

2

*E*  ω = ([− ( + )] + [ ( + )] )⇒

⇒ = (2+2 2)⇒ 2*x x*

*m*

2 2 2

*E*

2*a*ω ω*t* ϕ ω *a* ω*t* ϕ sin cos

⇒ = (*a* ω [ (ω*t* +ϕ)+ (ω*t* +ϕ)])⇒ *E*2 2 2 2

2

. (1.10)

sin cos

| 1  2 2  ⇒ *E* = *ma* ω 2 |
| --- |

ВАЖНО Согласно (1.10) энергия одномерного осциллятора пропорциональна квадрату

|  |
| --- |

амплитуды колебаний.

5

Иванов И.А., Механика и теория упругости

**§2. Вынужденные колебания**

***П.2.1. Общие положения***

Перейдем к рассмотрению колебаний в системе, на которую действует некоторое переменное внешнее поле; такие колебания называют **вынужденными** в отличие от рассмотренных в предыдущем параграфе так называемых **свободных** колебаний. Поскольку колебания предполагаются по-прежнему малыми, то тем самым подразумевается, что внешнее поле достаточно слабо, в противном случае оно могло бы вызвать слишком большое смещение *х*.

2

*kx*система обладает

В этом случае наряду с собственной потенциальной энергией 2

еще потенциальной энергией *U* (*x t*) *e*,, связанной с действием внешнего поля. Разлагая этот дополнительный член в ряд по степеням малой величины *x,* получим:

( ) ( )

∂

*U*

*U x t U t x* . , 0,∂ =

≈ +

*e*

*e ex x*

0

Первый член является функцией только от времени и потому может быть опущен в лагранжевой функции (как полная производная по *t* от некоторой другой функции ∂

времени). Во втором члене *xUe*

− есть внешняя «сила», действующая на систему в

∂

положении равновесия и являющаяся заданной функцией времени; обозначим ее как *F*(*t*). Таким образом, в потенциальной энергии появляется член − *xF*(*t*), так что потенциальная энергия рассматриваемой системы будет равна:

2

*kx U x t* ,

( )

∂

*U*

,∂ =

= + 2

*x*

*e*

*x*

*x*

0

и, следовательно, функция Лагранжа примет следующий вид:

|   2 2  *xF*(*t*)*mx kx L* = − + 2 2 |
| --- |

. (2.1)

Уравнение движения для лагранжевой функции (2.1) есть:

| *x x*2 1  *F*(*t*)*m*  +ω = |
| --- |

*m**x*+ *kx* = *F*(*t*)⇒ . (2.2) где мы снова ввели частоту свободных колебанийω .

6

Иванов И.А., Механика и теория упругости

Уравнение (2.1) представляет собой неоднородное линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, имеющее общее решение, равное сумме общего решения однородного и частного решения неоднородного:

*x* = *x* + *x* . (2.3)

*общ*.*одн*. *част*.*неодн*.

Однородное уравнение (2.2) совпадает с уравнением (1.5), общее решение которого было рассмотрено в предыдущем параграфе. Частное решение неоднородного уравнения (2.2) зависит от вида *F*(*t*)и подбирается индивидуально для каждой конкретной задачи:

| ( ) 1 2 . . . . cos sin cos *част неодн част неодн x* =*C* ω*t* +*C* ω*t* + *x* = *a* ω*t* +ϕ + *x* |
| --- |

где константы *C*1и *C*2определяются из начальных условий. ***П.2.2. Гармоническое внешнее воздействие***

, (2.4)

Рассмотрим имеющий особый интерес случай, когда вынуждающая сила тоже является простой периодической функцией времени с некоторой частотой γ, то есть рассмотрим *F*(*t*), которая имеет следующий вид:

*F*(*t*) = *f* ⋅cos(γ*t* + β). (2.5)

Подставим (2.5) в уравнение (2.2). В результате уравнение движения рассмтариваемой колебательной системы примет следующий вид:

| *x x* cos 2 1  +ω = *f* ⋅ (γ*t* + β )*m*  |
| --- |

. (2.6)

Частное решение уравнения (2.6) будем искать в виде:

*x* =*C*⋅ (γ*t* + β) *част неодн* cos . ., (2.7)

где *С* – некоторая неизвестная константа.

Подберем константу *С* таким образом, чтобы решение вида (2.7) удовлетворяло неоднородному уравнению (2.6). Для этого подставим (2.7) в (2.5):

( )+ ⋅ ⋅ ( + ) = ⋅ ( + )⇔ 2

*d C t*cos ⋅ +ω γ β γ β

cos 2

γ β*f t*

*dt*

*C t* cos

1

*m*

1

⇔ − γ (γ + β )+ω ⋅ ⋅ (γ + β ) = *f* ⋅ (γ*t* + β )⇒ cos cos 2 2

*C t C t* cos *m*

7

Иванов И.А., Механика и теория упругости

⇒ − + ⋅ = ⇒ =*mf*

2 2 1

*C C* . γ ω−

*f C*

*m*

( )

2 2

ω γ

Подставляя найденную константу в (2.7) получим искомое частное решение:

*f*

( )(γ β )

*xчаст неодн* cos . . 2 2

= *t*

*m*

и общее решение неоднородного:

ω γ⋅ + −

| *f*  ( )( )(γ β )ω γ *x a* cos *t* cos 2 2= + + *t*  ω ϕ ⋅ +  *m*  − |
| --- |

. (2.8)

Таким образом, под действием периодической вынуждающей силы система совершает движение, представляющее собой совокупность двух колебаний — с собственной частотой системы ωи с частотой вынуждающей силы γ .

ВАЖНО Решение (2.8) неприменимо в случае так называемого резонанса, когда частота

|  |
| --- |

вынуждающей силы совпадает с собственной частотой системы.

***П.2.2. Резонанс***

Найдем общее решение (2.6) для случая резонанса, то есть для дифференциального уравнения, имеющее следующий вид:

*x x* cos 2 1

+ω = *f* ⋅ (ω*t* + β )

 . (2.9)

*m*

Общее решение, будет тоже, а частное будем искать в виде:

*x* = *C* ⋅*t* ⋅ (ω*t* + β) *част неодн* . .sin , (2.10)

где *С* некоторая константа, которую найдем, подставив (2.10) в (2.9):

[ ( )]+ ⋅ ⋅ ( + ) = ⋅ ( + )⇔ 2

*d C t t*cos ⋅ ⋅ +ω ω β ω β sin sin 2

ω β*f t*

*C t t*

2

*dt*

1

*m*

[ ( ) ( )]+ ⋅ ⋅ ( + ) = ⋅ ( + )⇔ *d C t C t t*cos

⋅ + + ⋅ ⋅ ⋅ +

sin sin cos 2

ω β ω ω β*f t*

1

⇔ ω ω β ω β

*dt*

*C t t*

*m*

1

⇔ ⋅ω⋅ (ω + β )− ⋅ ⋅ω ⋅ (ω + β )+ ⋅ω⋅ (ω + β )+ω ⋅ ⋅ (ω + β ) = *f* ⋅ (ω*t* + β ) ⇔ cos sin cos sin 2 2

*C t C t t C t C t t* cos *m*

8

Иванов И.А., Механика и теория упругости

1

⇔ ⋅ω⋅ (ω + β ) = *f* ⋅ (ω*t* + β )⇒ 2 cos

*C t* cos

*m*

*f*

⇒ = ⇒

| *f*  *C*2  =  *m*ω |
| --- |

2*C*ω

*m*

Подставляя последнее выражение в (2.10) получим закон движения с случае резонанса:

| ( )( )  *x a t*2sin  cos⋅ ⋅ +  *f t t*  ω β  = ⋅ + +  ω ϕ*m*  ω |
| --- |

. (2.11)

ВАЖНО В случае резонанса амплитуда колебаний растет линейно со временем (до тех

|  |
| --- |

пор, пока колебания не перестанут быть малыми и вся излагаемая теория перестанет быть применимой).

**§3. Затухающие колебания**

До сих пор мы всегда подразумевали, что движение тел происходит в пустоте или что влиянием среды на движение можно пренебречь. В действительности при движении тела в среде последняя оказывает сопротивление, стремящееся замедлить движение. Энергия движущегося тела при этом в конце концов переходит в тепло или, как говорят, диссипируется.

Процесс движения в этих условиях уже не является чисто механическим процессом, а его рассмотрение требует учета движения самой среды и внутреннего теплового состояния как среды, так и тела. В частности, уже нельзя утверждать в общем случае, что ускорение движущегося тела является функцией лишь от его координат и скорости в данный момент времени, т.е. не существует уравнений движения в том смысле, какой они имеют в механике. Таким образом, задача о движении тела в среде уже не является задачей механики.

Существует, однако, определенная категория случаев, когда движение в среде может быть приближенно описано с помощью механических уравнений движения путем внедрения в них определенных дополнительных членов. Сюда относятся колебания с частотами, малыми по сравнению с частотами, характерными для внутренних диссипативных процессов в среде. При выполнении этого условия можно считать, что на тело действует сила трения, зависящая (для заданной однородной среды) только от его скорости.

9

Иванов И.А., Механика и теория упругости